

ДОКЛАДЫ

АКАДЕМИИ НАУК СССР

ВЫХОДЯТ ТРИ РАЗА В МЕСЯЦ

Редакционная коллегия: акад. Л. А. Арцимович, акад. А. Г. Бетехтин, акад. С. А. Векшинский, акад. Б. А. Казанский, акад. А. Н. Колмогоров (зам. главного редактора), акад. А. Л. Курсанов, акад. С. А. Лебедев, акад. А. И. Опарин (главный редактор), акад. Е. Н. Павловский, акад. Л. И. Седов, акад. Н. М. Страхов, акад. А. Н. Фрумкин (зам. главного редактора)

26-й ГОД ИЗДАНИЯ

1958

ТОМ 119, № 6

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

Стр.

- Д. Л. Берман. О распределении узлов в интерполяционном процессе С. Н. Берштейна 1063
- М. Бокштейн. Тензорные произведения систем групп и теоремы об универсальных коэффициентах для гомотопий и когомотопий 1066
- В. Г. Болтянский. Принцип максимума в теории оптимальных процессов . . . 1070
- С. И. Зуховицкий и Г. И. Эскин. Задача чебышевского приближения в коммутативном гильбертовом кольце 1074
- Е. К. Исакова. Асимптотика решения дифференциального уравнения параболического типа с малым параметром 1077
- А. И. Кострикин. О проблеме Бернсайда 1081
- А. Ф. Лаврик. Сложение простого числа с простой степенью заданного простого 1085
- В. Б. Лидский. Теоремы о полноте системы собственных и присоединенных элементов операторов с дискретным спектром 1088
- Б. М. Макаров. Об индуктивных пределах нормированных пространств . . 1092
- А. И. Мальцев. Определяющие соотношения в категориях 1095
- А. С. Маркус. О голоморфных оператор-функциях 1099
- К. А. Михайлова. Проблема вхождения для прямых произведений групп . . . 1103

ГИДРОМЕХАНИКА

- Г. Я. Галин. Об ударных волнах в средах с произвольным уравнением состояния 1106
- Л. А. Дорфман. Тепловой пограничный слой на вращающемся диске 1110
- Л. Н. Сретенский. К теории газовых струй 1113
- А. М. Тер-Крикоров. Нелинейная задача теории подводного крыла 1115

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

- Ю. А. Амензаде. Местные напряжения при кручении круглого призматического бруса с эллиптическим несоосным отверстием 1118
- В. А. Свекло и В. А. Сюкияйнен. Дифракция плоской упругой волны относительно угла 1122
- Л. А. Толоконников. Плоская деформация несжимаемого материала 1124

М. П. Авотина, Е. П. Григорьев, А. В. Золотавин и Б. Крачик. Излучение Tb^{160}	1127
Ю. Ф. Быдин и А. М. Бухтеев. Ионизация быстрых нейтральных атомов калия при столкновениях с атомами аргона и молекулами водорода, азота и кислорода	1131

ГЕОФИЗИКА

В. М. Каменкович. О некоторых упрощениях уравнений динамики стационарных течений в бароклинном море	1134
В. В. Шулейкин. Характеристические параметры поля ветровых волн в океане	1138

ТЕХНИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

О. С. Иванов. Некоторые закономерности в двойных металлических системах	1142
---	------

ЭЛЕКТРОТЕХНИКА

С. В. Страхов. Уравнения режима установившегося асинхронного хода электрических систем	1145
--	------

ХИМИЯ

К. А. Андрианов и А. К. Дабагова. Синтез кремнийорганических соединений, содержащих метакрильную группу	1149
Ю. Б. Крюков, А. Н. Башкиров, В. К. Бутюгин, Л. Г. Либеров и Н. Д. Степанова. О единстве механизма синтеза углеводов и кислородсодержащих соединений из СО и H_2	1152
И. Н. Лепешков, Н. Н. Ромашева и В. К. Соловьев. О калиенсности соляных отложений Тувы	1156
А. М. Сладков, В. А. Маркевич, И. А. Явич, Л. К. Лунева и В. Н. Чернов. Получение некоторых первичных спиртов через алюминийорганические соединения	1159
М. Н. Тиличенко и В. И. Высоцкий. Действие формамида на изомерные метиллендициклогексанон и трициклогексанолон	1162
А. В. Толчиев, Е. С. Покровская и Т. Г. Степанцева. Синтез алкилинданов	1164
А. Н. Хлапова. Фазовые превращения в системе сульфат — карбонат натрия	1167

ФИЗИЧЕСКАЯ ХИМИЯ

Б. Догадкин, К. Печковская и Э. Гольдман. О структуре и усиливающем действии коллоидной кремнекислоты как наполнителя синтетического каучука	1170
Е. Л. Франкевич и В. Л. Тальрозе. О сродстве к протону водорода и предельных углеводов	1174
Н. А. Фукс и С. С. Янковский. О термофореze в потоке аэрозоля	1177
И. Е. Эльпинер и А. В. Сокольская. О синтезе веществ в насыщенной газом восстановительной атмосфере воде под действием ультразвуковых волн	1180
Н. М. Эмануэль, Э. А. Блюмберг, Д. М. Зив и В. Л. Пикаева. Иницирующее действие излучения радона в процессе окисления изодекана (2,7-диметилдектана)	1183

ХИМИЧЕСКАЯ ТЕХНОЛОГИЯ

Р. Д. Оболенцев и А. В. Машкина. Кинетика гидрогенолиза дибензотиофена и октагидродибензотиофена над алюмокобальтомолибденовым катализатором	1187
--	------

ГЕОЛОГИЯ

М. Е. Воскобойников. Положение нуммулитовых известняков в разрезе палеогена Северного Приаралья	1191
Р. Г. Гарецкий, В. И. Самодуров и А. Л. Яншин. Морские альбские отложения на западном берегу Аральского моря	1195
Г. Х. Дикенштейн. О древнейшем прогибе на западе Русской платформы	1199
Н. А. Кудрявцев. О битумах в эффузивных породах	1202
Ю. С. Маймин. Некоторые новые данные по стратиграфии девонских отложений Уйменской депрессии (Горный Алтай)	1206
Б. Г. Сократов. О Восточно-Кубанской впадине Центрального Предкавказья	1209
С. Ф. Федоров. Условия образования нефтяных и газовых месторождений в ряде нефтеносных областей СССР	1212

ПЕТРОГРАФИЯ	Стр.
А. А. Глаголев. Взаимоотношения эгерина и щелочного амфибола в железистых кварцитах Курской магнитной аномалии	1216

ЦИТОЛОГИЯ	
А. К. Рябуха. Реактивное торможение клеточного деления в эпителии роговицы при раздражении животных в условиях предварительного введения глюкозы	1221

ГЕНЕТИКА	
К. В. Косиков и О. Г. Раевская. Влияние концентрации специфического субстрата на изменчивость ферментативных свойств дрожжей	1225

ГИДРОБИОЛОГИЯ	
В. П. Луферов. Влияние температуры на газообмен личинок некоторых Peleopinae (Tendipedidae, Diptera)	1229

АНАТОМИЯ РАСТЕНИЙ	
Н. П. Доманская. Формирование корневой системы черешчатого дуба	1233

ФИЗИОЛОГИЯ РАСТЕНИЙ	
И. Беликов и Э. Костецкий. Распределение продуктов фотосинтеза у сои в ранние фазы ее развития	1236
В. И. Словиковский. К вопросу о разложении и выщелачивании листьев древесных растений	1240
Н. Д. Тимашов. Влияние микроэлементов меди и кобальта на содержание нуклеиновых кислот в листьях картофеля	1244

ЗООЛОГИЯ	
Н. В. Бондаренко и Куан Хай-юань. Особенности возникновения диапаузы у различных географических популяций паутинного клеща	1247

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ МОРФОЛОГИЯ	
Л. В. Ахабадзе. Гистологические изменения при заживлении поврежденного миокарда у крыс	1251

ФИЗИОЛОГИЯ	
П. Г. Костюк. Электрические проявления реципрокного возбуждения и торможения в отдельных мотонейронах	1255

Указатель статей к тому 119	
Систематический	I
Алфавитный	XI

C O N T E N T S

MATHEMATICS	Pages
D. L. Berman. The distribution of nodes in the Bernstein interpolation process	1063
M. Bockstein. Tensor products of the systems of groups and universal coefficient theorems for homologies and cohomologies	1066
V. G. Boltjansky. The maximum principle in the theory of optimum processes	1070
S. I. Zukhovitsky and G. I. Eskin. Chebyshev approximation in a commutative Hilbert ring	1074
E. K. Isakova. The asymptotic of the solution of a parabolic type of differential equation involving a small parameter	1077
	1059

	<i>Pages</i>
A. I. Kostrikin. On Burnside's problem	1081
A. F. Lavrik. Addition of a prime to a prime power of a given prime	1085
V. B. Lidskii. Theorems on the completeness of a system of characteristic and adjoined elements of operators having a discrete spectrum	1088
B. M. Makarov. Inductive limits of normed spaces	1092
A. Malcev. The defining relations in categories	1095
A. S. Markus. On holomorphic operator functions	1099
K. A. Mikhailova. The entrance problem for direct unions of groups	1103

FLUID MECHANICS

G. J. Galin. Shock waves in media described by an arbitrary equation of state	1106
L. A. Dorfman. Thermal boundary layer on a rotating disc	1110
L. N. Sretensky. On the theory of gas jets	1113
A. M. Ter-Krikorov. A non-linear problem in the underwater wing theory	1115

THEORY OF ELASTICITY

Yu. A. Amenzade. Local stresses in a twisted circular prismatic rod with an elliptical not coaxial hole	1118
V. A. Sveklo and V. A. Siukiyainen. The diffraction of a plane elastic wave relative to an angle	1122
L. A. Tolokonnikov. A plane deformation of an incompressible material	1124

PHYSICS

M. P. Avotina, E. P. Grigoriev, A. V. Zolotavin and B. Kratsik. Radiation of Tb ¹⁰⁰	1127
Yu. F. Bydin and A. M. Bukhteev. The ionization of fast neutral potassium atoms on collisions with argon atoms and with molecules of hydrogen, nitrogen and oxygen	1131

GEOPHYSICS

V. M. Kamenkovich. Certain simplifications of dynamics equations for steady currents in a baroclinic sea	1134
W. Shoulejkin. The characteristic parameters of the wind wave field in the ocean	1138

TECHNICAL PHYSICS

O. S. Ivanov. Certain regularities in binary metal systems	1142
--	------

ELECTRICAL ENGINEERING

S. V. Strakhov. The equations of the steady asynchronous operation of electric systems	1145
---	------

CHEMISTRY

K. A. Andrianov and A. K. Dabagova. The synthesis of organosilicic compounds containing a metacryl group	1149
Yu. B. Kriukov, A. N. Bashkirov, V. K. Butiugin, L. G. Liberov and N. D. Ste- panova. The generality of the mechanism underlying the reactions in which hydrocarbons and oxygen containing compounds are synthesized from CO and H ₂	1152
I. N. Lepeshkov, N. N. Romasheva and V. K. Soloviev. Potassium-bearing salt de- posits of Tuva	1156
A. M. Sladkov, V. A. Markevich, I. A. Iavich, L. K. Luneva and V. N. Chernov. The production of certain primary alcohols through organoaluminium compounds	1159
M. N. Tilichenko and V. I. Vysotsky. The action of formamide on isomeric methylenedicyclohexanone and tricyclohexanolone	1162
A. V. Topchiev, E. S. Pokrovskaya and T. G. Stepanova. The synthesis of alkylindans	1164
A. N. Khlapova. Phase transformations in the sodium sulphate-sodium carbonate system	1167

PHYSICAL CHEMISTRY

B. Dogadkin, K. Pechkovskaya and E. Goldman. The structure and the rein- forcing effect of colloidal silica as a loading material for synthetic rubber	1170
---	------

E. L. Frankevich and V. L. Talrose. Proton affinity of hydrogen and saturated hydrocarbons	1174
N. A. Fuchs and S. S. Jankovsky. Thermophoresis in an aerosol flow	1177
I. E. Elpiner and A. V. Sokolskaia. Chemical synthesis under the action of supersonic waves in a water saturated with gases of a reducing atmosphere	1180
N. M. Emanuel, E. A. Blumberg, D. M. Ziv and V. L. Pikaeva. The initiating effect of the radon emission in the oxidation of isodecane (2,7-dimethyloctane)	1183

CHEMICAL TECHNOLOGY

R. D. Obolentsev and A. V. Mashkina. The hydrogenolysis kinetics of dibenzothiophene and octahydrodibenzothiophene over an aluminium-cobalt-molybdenum catalyst	1187
---	------

GEOLOGY

M. E. Voskoboinikov. The position of nummulitic limestones in a section across the Paleogene of North Near-Aral region	1191
R. G. Garetsky, V. I. Samodurov and A. L. Yanshin. Marine Albian deposits on the western shore of the Aral Sea	1195
G. Kh. Dickenstein. On the most ancient downwarping in the West of the Russian platform	1199
N. A. Kudriavtzev. On bitumens in effusive rocks	1202
Yu. S. Maimin. Some new data concernig the stratigraphy of Devonian deposits of the Uymen depression (Mountain Altai)	1206
B. G. Sokratov. On the East-Kubanian depression of Central Ciscaucasia	1209
S. F. Fedorov. Conditions for the formation of oil and gas fields in certain oil-bearing arcas of the USSR	1212

PETROGRAPHY

A. A. Glagolev. Relations between aegyrin and alkaline amphibole in ferruginous quartzites of the Kursk magnetic anomaly	1216
--	------

CYTOLOGY

A. K. Riabukha. Reactive inhibition of cell division in the cornea epithelium, taking place in the case of irritation of animals under conditions of preliminary administration of glucose	1221
--	------

GENETICS

K. V. Kosikov and O. G. Raevskaia. The influence of the concentration of a specific substratum upon variation in fermentative properties of yeasts	1225
--	------

HYDROBIOLOGY

V. P. Luferov. Gas exchange in larvae of certain Pelopiinae (Tendipedidae, Diptera), as affected by temperature	1229
---	------

PLANT ANATOMY

N. P. Domanskaia. The formation of the root system in <i>Quercus robur</i> L.	1233
I. Belikov and E. Kostetsky. The distribution of photosynthetic products in the soya-bean plant at early stages of its development	1236
V. I. Slovikovsky. On the problem of decomposition and lixiviation of leaves of arboreal plants	1240
N. D. Timashov. Content of nucleic acids in potato leaves, as affected by the trace elements, copper and cobalt	1244

ZOOLOGY

N. V. Bondarenko and Kuan Kuay-uan. Peculiar traits in the origin of diapause in different geographic populations of <i>Tetranychus urticae</i> Koch	1247
--	------

EXPERIMENTAL MORPHOLOGY

L. V. Akhabadze. Histological changes taking place in the course of healing of damaged heart muscle in rats	1251
---	------

PHYSIOLOGY

P. G. Kostiuk. Electric manifestations of reciprocal excitation or inhibition in separate motor neurons	1255
	1061

ПОПРАВКИ

В статье Н. И. Ершова и Я. Т. Эйдуса «Экспериментальное обоснование цепного механизма гетерогенно-каталитической реакции гидрополимеризации олефинов, протекающей под влиянием окиси углерода и водорода», помещенной в ДАН, т. 115, № 6, 1957 г., на стр. 1127 в табл. 1 вместо «Выход на инициатор, %», следует читать: «Выход на инициатор».

В статье З. А. Виноградовой «Биохимический состав планктона Черного моря», помещенной в ДАН, т. 116, № 4, 1957 г., на стр. 689 фразу на строках 11—24 следует читать:

Соленость в этих районах была на $3-4\text{‰}$ выше, чем в следующем 1955 г., и на такую же величину выше средней многолетней солености, что и способствовало развитию типично черноморских форм зоопланктона и, наоборот, создало неблагоприятные условия для развития солоноватоводных и теплолюбивых форм планктона, дающих в обычные годы в этой части моря и в это время года сильную вспышку развития.

В статье А. С. Кельзона «Самонаведение как задача технической кибернетики», помещенной в ДАН, т. 116, № 6, 1957 г., на стр. 934, строка 23 снизу напечатано $\psi = \pi/2$, следует читать $\psi = -\pi/2$; на стр. 934, строка 5 снизу напечатано: изменяется, следует читать: измеряется.

В статье А. Виноградова, Б. Делоне и Д. Фукса «О рациональных приближениях к иррациональным числам с ограниченными неполными частными», помещенной в ДАН, т. 118, № 5, 1958 г., конец стр. 864 и начало стр. 865 следует читать:

Из этого доказательства получаются такие следствия:

1. Если θ принадлежит $\{L\}$, опирающемуся на $\{M\}$, с рядом (1), достижимое при α_0 , то разложение θ в непрерывную дробь имеет вид

$$\theta = a_0, a_1 a_2 \dots \overbrace{a_k \alpha_0 \{a\}}^{\alpha_1} \overbrace{\alpha_{-1} \alpha_0 \alpha_1 \{a\}}^{\alpha_{-2} \alpha_{-1} \alpha_0 \alpha_1 \alpha_2} \{a\} \dots,$$

где $a_0, a_1, \dots, a_k$ произвольны, $\alpha_1, \overbrace{\alpha_{-1} \alpha_0 \alpha_1}^{\alpha_{-2} \alpha_{-1} \alpha_0 \alpha_1 \alpha_2}, \dots$ — все более длинные отрезки ряда (1), симметричные к α_0 , и $\{a\}$ — конечные «вставки», которые могут быть довольно произвольны. В силу произвольности этих вставок на один и тот же достижимый класс $\{M\}$, вообще говоря, опирается континуум классов $\{L\}$. При этом всякий раз $\lambda_L = \lambda_M$.

Д. Л. БЕРМАН

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ УЗЛОВ В ИНТЕРПОЛЯЦИОННОМ ПРОЦЕССЕ С. Н. БЕРНШТЕЙНА

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 26 XII 1957)

1°. Пусть задана треугольная матрица узлов

$$-1 \leq x_1^{(n)} < x_2^{(n)} < \dots < x_n^{(n)} \leq 1, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (1)$$

и функция $f(x)$, определенная в сегменте $[-1, 1]$. Согласно классическому результату С. Н. Бернштейна и Г. Фабера, не существует матрицы вида (1), при которой интерполяционный процесс Лагранжа $L_n(f, x)$ удовлетворяет для любой непрерывной функции равномерно соотношению

$$L_n(f, x) \rightarrow f(x), \quad n \rightarrow \infty, \quad -1 \leq x \leq 1.$$

В связи с этим отрицательным результатом представляет интерес интерполяционный процесс $\{A_n(f, x)\}_{n=1}^{\infty}$ С. Н. Бернштейна (1), который определяется по закону

$$A_n(f, x) = \sum_{j=1}^n f(x_j^{(n)}) r_j(x), \quad r_j(x) = l_j(x) + (-1)^{j-1} l_{2pt_j}(x), \quad (2)$$

где $\{l_j(x)\}_{j=1}^n$ — фундаментальные полиномы Лагранжа n -й строки матрицы (1); p — произвольное фиксированное натуральное число. Целое число t_j определяется однозначно из неравенств $2p(t_j - 1) < j < 2pt_j$. Штрих в сумме (2) указывает на то, что j принимает все целые значения от 1 до n , за исключением чисел, кратных $2p$. Если $2pt_j > n$, то мы считаем $l_{2pt_j}(x) = 0$.

Полиномы $A_n(f, x)$ обладают двумя важными свойствами:

1) Можно указать весьма обширный класс матриц узлов вида (1), при которых для любой непрерывной в $[-1, 1]$ функции $f(x)$ имеет место равномерно соотношение (1-3)

$$A_n(f, x) \rightarrow f(x), \quad n \rightarrow \infty, \quad -1 \leq x \leq 1. \quad (3)$$

2) Отношение степени полинома $A_n(f, x)$ к числу его узлов сколь угодно близко к 1, если только p достаточно велико.

С другой стороны, в случае равноотстоящих узлов отрезка $[-1, 1]$ процесс $A_n(f, x)$, построенный для функции $f(x) \equiv x$, расходится во всех точках $x \neq 0$ из интервала $(-1, 1)$ (1, 4).

В связи с указанными фактами возникает естественный вопрос: какова должна быть матрица узлов (1), чтобы для любой непрерывной функции выполнялось равномерно соотношение (3)? Настоящая заметка и посвящена этому вопросу.

2°. Положим

$$x_k^{(n)} = \cos \theta_k^{(n)}, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad n = 1, 2, \dots$$

Мы будем говорить, что узлы $\{x_k^{(n)}\}_{k=1}^n$, $n = 1, 2, \dots$, квазиравномерно распределены на полуокружности, если существуют такие положительные константы c_1 и c_2 , не зависящие от n , что

$$\frac{c_1}{n} \leq \theta_v^{(n)} - \theta_{v+1}^{(n)} \leq \frac{c_2}{n}, \quad v = 1, 2, \dots, (n-1), \quad n = 2, 3, \dots$$

Теорема 1. Пусть фундаментальные полиномы С. Н. Бернштейна ограничены в совокупности

$$|r_j^{(n)}(x)| \leq c_3, \quad j = 1, 2, \dots, \quad n = 1, 2, \dots, \quad -1 \leq x \leq 1.$$

Тогда узлы полиномов $\{A_n(f, x)\}_{n=1}^\infty$ квазиравномерно распределены на полуокружности.

Из теоремы 1 легко получить теорему 2.

Теорема 2. Для того чтобы интерполяционный процесс $\{A_n(f, x)\}_{n=1}^\infty$ С. Н. Бернштейна, построенный для любой непрерывной в сегменте $[-1, 1]$ функции $f(x)$, равномерно сходилась в $[-1, 1]$ к функции $f(x)$, необходимо, чтобы узлы полиномов $\{A_n(f, x)\}_{n=1}^\infty$ были квазиравномерно распределены на полуокружности.

3°. В (2) были даны достаточные условия для выполнения соотношения (3) равномерно для любой непрерывной функции. В частности, от матрицы узлов требовалось, чтобы она удовлетворяла условиям

$$|l_1^{(n)}(1)| \leq |l_2^{(n)}(1)| \leq \dots \leq |l_n^{(n)}(1)|, \quad n = n_0, n_0 + 1, \dots; \quad (4)$$

$$|l_1^{(n)}(-1)| \geq |l_2^{(n)}(-1)| \geq \dots \geq |l_n^{(n)}(-1)|, \quad n = n_0, n_0 + 1, \dots \quad (5)$$

Неравенства (4) и (5) можно весьма просто охарактеризовать геометрически, если ввести в рассмотрение так называемые сопряженные точки. Положим

$$P_k(x) = l_k(x) + l_{k+1}(x), \quad k = 1, 2, \dots, (n-1).$$

$P_k(x)$ — многочлен $(n-1)$ -й степени. Точки $x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_{k+2}, \dots, x_n$ являются простыми корнями $P_k(x)$. Так как все корни $P_k(x)$ вещественны, то существует корень X_k многочлена $P_k(x)$, отличный от ранее указанных его корней.

Легко видеть, что

$$X_k = x_k + \frac{1}{1-a_k}(x_{k+1} - x_k), \quad a_k = -\frac{\omega'_n(x_k)}{\omega'_n(x_{k+1})} > 0,$$

где $\omega_n(x) = \prod_{j=1}^n (x - x_j^{(n)})$. Точку X_k мы будем называть сопряженной относительно точки x_k . Если $a_k = 1$, то мы считаем $X_k = \infty$. Сопряженные точки $\{X_k\}_{k=1}^{(n-1)}$, в отличие от точек $\{x_k\}_{k=1}^n$, вообще говоря, не лежат в интервале $(-1, 1)$. Как это будет видно из дальнейшего, в теории интерполяции представляет особый интерес тот случай, когда сопряженные точки находятся вне интервала $(-1, 1)$. Так, например, в случае узлов П. Л. Чебышева $x_k = \cos \frac{2n-2k+1}{2n} \pi$, $k = 1, 2, \dots, n$, сопряженные точки вычисляются по формулам

$$X_k = -\frac{\cos \frac{\pi}{2n}}{\cos \frac{k}{n} \pi}, \quad k = 1, 2, \dots, (n-1).$$

Из этих равенств видно, что если $0 < x_k < 1$, то $X_k > 1$; если же $-1 < x_k < 0$, то $X_k < -1$. Таким образом, в случае узлов П. Л. Чебышева сопряженные точки находятся вне сегмента $[-1, 1]$.

Поскольку чебышевские узлы удовлетворяют неравенствам (4) и (5), то возникает вопрос, как расположены сопряженные точки в случае произвольных матриц узлов, удовлетворяющих неравенствам (4) и (5)? Ответ дается теоремой 3.

Теорема 3. *Для того чтобы выполнялись неравенства*

$$|l_k(1)| \leq |l_{k+1}(1)|, \quad |l_k(-1)| \geq |l_{k+1}(-1)|,$$

необходимо и достаточно, чтобы сопряженная точка X_k удовлетворяла неравенству $X_k \leq -1$, если $a_k > 1$, или неравенству $X_k \geq 1$, если $a_k < 1$.

В (2) доказано, что если n -я строчка матрицы (1) состоит из корней полинома Якоби $J_n(x, \alpha^{(n)}, \beta^{(n)})$ с параметрами $-1 \leq \alpha^{(n)} \leq 0$, $-1 \leq \beta^{(n)} \leq 0$, то матрица (1) удовлетворяет неравенствам (4) и (5). Поэтому из теоремы 3 вытекает теорема 4.

Теорема 4. *Пусть n -я строчка матрицы (1) состоит из корней полинома Якоби $J_n(x, \alpha^{(n)}, \beta^{(n)})$, $n = 1, 2, \dots$, с параметрами $-1 \leq \alpha^{(n)} \leq 0$, $-1 \leq \beta^{(n)} \leq 0$ *.*

Тогда сопряженные точки находятся вне интервала $(-1, 1)$.

Мы уже отмечали, что в случае узлов П. Л. Чебышева сопряженные точки находятся вне $(-1, 1)$. Очевидно, что это утверждение представляет частный случай теоремы 4, когда $\alpha^{(n)} = \beta^{(n)} = -1/2$.

Новгородский государственный
педагогический институт

Поступило
26 XII 1957

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ С. Н. Бернштейн, Собр. соч., 2, Изд. АН СССР, 1954, стр. 130. ² Д. Л. Берман, ДАН, 60, № 3 (1948). ³ Д. Л. Берман, ДАН, 81, № 1 (1951). ⁴ Д. Л. Берман, ДАН, 70, № 2 (1950).

* По определению, $J_n(x, -1, -1) = \int_{-1}^x P_{n-1}(t) dt$, где $P_n(t)$ — полином Лежандра n -й степени.

М. БОКШТЕЙН

ТЕНЗОРНЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ СИСТЕМ ГРУПП И ТЕОРЕМЫ ОБ УНИВЕРСАЛЬНЫХ КОЭФФИЦИЕНТАХ ДЛЯ ГОМОЛОГИЙ И КОГОМОЛОГИЙ

(Представлено академиком П. С. Александровым 18 XII 1957)

1. Вопросу о нахождении универсальной группы коэффициентов для спектральных групп гомологий или когомологий топологического пространства в смысле Чеха была посвящена работа Стиррода ⁽¹⁾. Однако, вследствие применения неправильной алгебраической леммы, доказанной в этой работе фактически оказывается не формула

$$H^q(X, G) \approx H_0^q(X) \otimes G + H_0^{q+1}(X) * G, \quad (1)$$

означающая универсальность целочисленных коэффициентов для таких групп когомологий, а лишь более слабый факт, что последовательность

$$0 \rightarrow H_0^q(X) \otimes G \rightarrow H^q(X, G) \rightarrow H_0^{q+1}(X) * G \rightarrow 0 \quad (2)$$

является точной, т. е. что $H^q(X, G) / H_0^q(X) \otimes G \approx H_0^{q+1}(X) * G$. Здесь $H^q(X, G)$ — q -мерная спектральная группа когомологий пространства X по группе коэффициентов G ; $H_0^q(X) = H^q(X, I)$, где I — аддитивная группа целых чисел; $\otimes$ — знак тензорного произведения; $*$ — знак произведения кручения. Эйленбергу и Маклейну удалось исправить доказательство формулы (1), но лишь для метрических компактов ⁽²⁾, указание на стр. 820 и теорема 44.2).

Универсальность группы I в общем случае была доказана мною в работе ⁽³⁾ (гл. I, § 5), однако без явного указания формулы, дающей группу $H^q(X, G)$. Результаты этой работы были получены в течение 40-х годов (полностью работа написана к 1950 г.), а потому в ней не применялись современные методы, с точки зрения которых данное в ней доказательство после введения соответствующих понятий становится значительно короче и прозрачнее. Вместе с тем, как мы сейчас покажем, удастся в общем случае доказать формулу (1).

2. Введем следующие определения. Назовем системой групп $\{G_\alpha; \pi\}$ совокупность аддитивных абелевых групп G_α , для некоторых из которых определены гомоморфизмы $\pi = \pi_\beta^\alpha$ группы G_α в группу G_β (в частности, если индексы α направлены частично упорядочены, то систему называем прямым, обратным или двусторонним спектром, когда эти гомоморфизмы определены, соответственно, при $\alpha < \beta$, $\alpha > \beta$ и в обоих случаях). Две системы $\{G_\alpha; \pi\}$ и $\{H_\alpha; \omega\}$ называются сопряженными, если они определены для одинакового множества индексов и если гомоморфизмы ω_α^β определены тогда и только тогда, когда определены гомоморфизмы π_β^α . Тензорным произведением двух сопряженных систем $\{G_\alpha; \pi\} \otimes \{H_\alpha; \omega\}$ называется фактор-группа прямой суммы

$\sum_{\alpha} G_{\alpha} \otimes H_{\alpha}$ по подгруппе, порожденной всеми элементами вида $g_{\alpha} \otimes \omega_{\alpha}^{\beta} h_{\beta}$ — $\pi_{\beta}^{\alpha} g_{\alpha} \otimes h_{\beta}$ ($g_{\alpha} \in G_{\alpha}$, $h_{\beta} \in H_{\beta}$).

Нами была доказана теорема ((3), гл. I, § 3, или (4)), которую с помощью введенного определения можно записать в виде формулы

$$H^q(X, G) \approx \{H_m^q(X); \pi_m^{m'}, \omega_m^{m'}\} \otimes \{{}_m G; i_m^m, j_m^{m'}\}, \quad (3)$$

где m пробегает неотрицательные числа; $H_m^q(X) = H^q(X, I_m)$; $I_0 = I$; $I_m = I/mI$; mI — подгруппа элементов группы I , делящихся на m (аналогично вообще определяются ${}_m G$ и G_m для произвольной группы G); ${}_m G$ — подгруппа элементов $g \in G$, для которых $mg = 0$; гомоморфизмы $\pi_m^{m'}$, $\omega_m^{m'}$, i_m^m , $j_m^{m'}$ определены при m/m' ; i_m^m есть отображение вложения подгруппы ${}_m G$ в подгруппу ${}_{m'} G$; $j_m^{m'}$ — отображение ${}_{m'} G$ в ${}_m G$, возникающее в результате умножения элементов группы G на число $\frac{m'}{m}$; $\pi_m^{m'}$ есть гомоморфизм $H_{m'}^q(X)$ в $H_m^q(X)$, порожденный приведением группы коэффициентов по модулю m ; $\omega_m^{m'}$ — гомоморфизм $H_m^q(X)$ в $H_{m'}^q(X)$, порожденный отображением I_m в $I_{m'}$, вызванным умножением на число $\frac{m'}{m}$. Так как система $\{{}_m G; i_m^m, j_m^{m'}\}$ определяется заданием группы G , то формула (3) показывает, что система $\{H_m^q(X); \pi_m^{m'}, \omega_m^{m'}\}$, называемая нами модульным спектром групп когомологий пространства, является универсальной системой групп когомологий, т. е. определяет группы когомологий пространства по любой группе коэффициентов.

3. Напоминаем доказательство формулы (3). Пусть $\sum u_i \otimes g_i$ есть элемент тензорного произведения правой части этой формулы ($u_i \in H_{m_i}^q(X)$, $g_i \in {}_{m_i} G$, $i = 1, \dots, s$). Ему однозначно отвечает элемент (который мы обозначим через $\sum g_i u_i$ группы $H^q(X, G)$, содержащий коцикл $l^q = \sum g_i l_i^q$, где l_i^q — целочисленные коцепи некоторого покрытия Ω^x рассматриваемого пространства X , которые после приведения по модулю m_i будут являться коциклами из классов когомологий u_i . Обратно, пусть $u \in H^b(X, G)$, а l^q — содержащийся в u коцикл некоторого покрытия Ω^x пространства X . Как известно, для всякого конечного комплекса, а значит и для нерва покрытия Ω^x , существуют такие свободные образующие l_i^q групп целочисленных коцепей (значения, пробегаемые индексом i для различных значений размерности q , лишь частично перекрываются), что $\nabla l_i^q = m_{iq} l_i^{q+1}$, где ∇ — кограничный оператор, а m_{iq} — неотрицательные целые числа (зависящие от i и q). Поэтому $l^q = \sum g_i l_i^q$, $g_i \in G$, $\nabla l^q = m_{iq} g_i l_i^{q+1} = 0$ и, значит, $m_{iq} g_i = 0$, т. е. $g_i \in {}_{m_{iq}} G$, а следовательно, элемент u всегда отвечает некоторому элементу $\sum u_i \otimes g_i$ тензорного произведения из формулы (3). Наконец, если $\sum \bar{g}_k \bar{u}_k = 0$, $\bar{g}_k \in {}_{\bar{m}_k} G$, $\bar{u}_k \in H_{\bar{m}_k}^q(X)$, то в некотором покрытии Ω^x будет $\sum \bar{g}_k \bar{l}_k^q \sim 0$, $\bar{l}_k^q \in \bar{u}_k$, т. е., разлагая по образующим l_i^q из вышеуказанного базиса (построенного для Ω^x), $\sum_{i,k} \bar{g}_k \lambda_{ik} l_i^q = \nabla \left(\sum_i g'_i l_i^{q-1} \right) = \sum_i m'_{ik} g'_i l_i^q$, где $g'_i \in G$, откуда $\sum_k \bar{g}_k \lambda_{ik} = m'_{ik} g'_i$. С другой стороны, соотношение $\nabla \bar{l}_k^q = 0$, т. е. $\nabla \left(\sum_i \lambda_{ik} l_i^q \right) = \sum_i \lambda_{ik} m_{ik} l_i^{q+1} \equiv 0 \pmod{\bar{m}_k}$ дает $m_{ik} \lambda_{ik} \equiv 0 \pmod{\bar{m}_k}$, т. е. $\lambda_{ik} = \lambda'_{ik} \bar{m}_k / \delta_{ik}$, где λ'_{ik} целые, а $\delta_{ik} = (m_i, \bar{m}_k)$, а потому

$$\sum_k \bar{u}_k \otimes \bar{g}_k = \sum_{i,k} \lambda'_{ik} \omega_{\frac{\delta_{ik}}{m_k}} \pi_{\delta_{ik}}^{m_i} u_i \otimes \bar{g}_k = \sum_{i,k} u_i \otimes \lambda'_{ik} i_{\delta_{ik}}^{\delta_{ik}} \bar{g}_k = \sum_{i,k} u_i \otimes \lambda'_{ik} \frac{\bar{m}_k}{\delta_{ik}} \bar{g}_k =$$

$$= \sum_{i,k} u_i \otimes \lambda_{ik} \bar{g}_k = \sum_{i,k} u_i \otimes m'_i g'_i = 0, \text{ т. е. соответствие между левой и пра-}$$

 вой частями формулы (3) будет взаимно-однозначным (здесь $m_i = m_{i,q}$, $m'_i = m_{i,q-1}$, $m_i m'_i = 0$, u_i — класс когомологий, содержащий приведенную по модулю m'_i коцепь l^q_i).

4. Отметим, что если G кольцо, то формула (3) позволяет определять кольцо когомологий пространства с коэффициентами из G по его кольцам когомологий $\text{mod } m$ ($m = 0, 1, 2, \dots$) и отображениям π и ω . Для этого, как нетрудно видеть, достаточно определить умножение в правой части этой формулы так ($u_1 \in H_{m_1}^{q_1}(X)$, $u_2 \in H_{m_2}^{q_2}(X)$, $g_1 \in m_1 G$, $g_2 \in m_2 G$):

$$(u_1 \otimes g_1) \cdot (u_2 \otimes g_2) = (\pi_{\delta}^{m_1} u_1 \cdot \pi_{\delta}^{m_2} u_2) \otimes (g_1 g_2),$$

где $\delta = (m_1, m_2)$, что имеет смысл, так как, очевидно, $g_1 g_2 \in \delta G$, т. е. $\delta g_1 g_2 = 0$ (ибо $\delta = \lambda_1 m_1 + \lambda_2 m_2$, где λ_1 и λ_2 целые).

5. Универсальность группы I для спектральных групп когомологий топологического пространства можно теперь доказать так. Сперва без труда показываем, что последовательности

$$\dots \rightarrow H_0^q(X) \xrightarrow{m} H_0^q(X) \xrightarrow{\pi} H_m^q(X) \xrightarrow{\chi} H_0^{q+1}(X) \xrightarrow{m} H_0^{q+1}(X) \rightarrow \dots, \quad (4)$$

$$\dots \xrightarrow{\omega} H_n^q(X) \xrightarrow{\omega} H_{mn}^q(X) \xrightarrow{\pi} H_m^q(X) \xrightarrow{\pi \chi} H_n^{q+1}(X) \xrightarrow{\omega} H_{mn}^{q+1}(X) \rightarrow \dots, \quad (5)$$

где через m обозначен эндоморфизм, состоящий в умножении всех элементов группы на число m , через $\chi = \chi_0^m$ — введенный нами в (9) граничный гомоморфизм (т. е. $\chi_0^m u$, где $u \in H_m^q(X)$, есть $(q+1)$ -мерный целочисленный класс когомологий, содержащий коцикл $\frac{1}{m} \nabla l$, где l после приведения по модулю m входит в u) и через $\pi \chi$ — суперпозиция $\pi_n^0 \chi_0^m$, являются точными ((3), гл. I, § 5, лемма 2). Последовательность (4), очевидно, порождает новую точную последовательность ($m \neq 0$)

$$0 \rightarrow [H_0^q(X)]_m \rightarrow H_m^q(X) \rightarrow {}_m[H_0^{q+1}(X)] \rightarrow 0, \quad (6)$$

где, как всегда, положено $[H_0^q(X)]_m = H_0^q(X) / m H_0^q(X)$.

Так как все элементы группы ${}_m[H_0^{q+1}(X)]$ имеют порядки, ограниченные одним и тем же числом m , то, по теореме Прюфера ((6), стр. 156), ${}_m[H_0^{q+1}(X)]$ распадается в прямую [сумму циклических групп. Мы покажем, что можно построить отображение $\tilde{\chi} = \tilde{\chi}_0^m: {}_m[H_0^{q+1}(X)] \rightarrow H_m^q(X)$, взяв для каждой из образующих циклических слагаемых группы ${}_m[H_0^{q+1}(X)]$ один из элементов группы $H_m^q(X)$, который в нее переходит при отображении χ . Тогда $\tilde{\chi} \chi$ есть тождественное отображение, а потому точная последовательность (6) раскалывается, т. е.

$$H_m^q(X) \approx [H_0^q(X)]_m + {}_m[H_0^{q+1}(X)]. \quad (7)$$

Произвол, имеющийся в построении отображения $\tilde{\chi}$, можно использовать таким образом, чтобы получить своего рода когерентность таких прямых разложений. А именно, для каждого простого числа p сначала указанным образом строим отображение $\tilde{\chi}_p^0: {}_p[H_0^{q+1}(X)] \rightarrow H_p^q(X)$, а дальнейшее построение производим индуктивно: если $\tilde{\chi}_{p^{h-1}}^0$ уже построено, то для тех образующих a_i циклических слагаемых группы ${}_{p^h}[H_0^{q+1}(X)]$, порядки которых $\leq p^{h-1}$, полагаем $\tilde{\chi}_{p^h}^0 a_i = \omega_{p^h}^{p^{h-1}-1} \tilde{\chi}_{p^{h-1}}^0 a_i$, а для образующих порядка p^h за $\tilde{\chi}_{p^h}^0 a_i$ принимаем один из элементов u группы $H_{p^h}^q(X)$, для

которых $\pi_{p^{h-1}}^{p^h} u = \tilde{\chi}_{p^{h-1}}^0(pa_i)$, $\chi_0^{p^h} u = a_i$. Так как $\pi_p^0 \chi_0^{p^{h-1}-1} \tilde{\chi}_{p^{h-1}}^0(pa_i) = \pi_p^0(pa_i) = 0$, то, в силу точности последовательности (5) при $m = p^{h-1}$, $n = p$, такой элемент u' , который удовлетворяет первому из этих условий, существует. Тогда

$$p(a_i - \chi_0^{p^h} u') = pa_i - \chi_0^{p^{h-1}} \pi_{p^{h-1}}^{p^h} u' = pa_i - \chi_0^{p^{h-1}-1} \tilde{\chi}_{p^{h-1}}^0(pa_i) = pa_i - pa_i = 0,$$

а потому, вследствие точности последовательности (4), $a_i - \chi_0^{p^h} u' = \chi_0^{p^h} \omega$, и элемент $u = u' + \omega$ будет удовлетворять и второму условию (здесь используются очевидные формулы $\chi_0^m = \chi_0^{m'} \omega_{m'}^m$, $\frac{m'}{m} \chi_0^{m'} = \chi_0^m \pi_{m'}^m(m/m')$).

Для так построенного отображения $\tilde{\chi}_{p^h}^0$ будет $\chi_0^{p^h} \tilde{\chi}_{p^h}^0 a_i = a_i$, т. е. $\chi \tilde{\chi} = 1$. Если $m = m_1 \dots m_n$, где $m_i = p_i^{k_i}$ и $p_1, \dots, p_n$ — различные простые числа, то полагаем $\tilde{\chi}_m^0 = \sum_i \omega_{m_i}^{m_i} \tilde{\chi}_{m_i}^0$. Тогда, как легко видеть, $\chi_0^m \tilde{\chi}_m^0 = 1$ будет справедливо для всех m .

Вновь используя аналогичным образом точность последовательности (5), без труда получаем, что $\pi_m^{m'} \tilde{\chi}_m^0 a = \tilde{\chi}_m^0 \left(\frac{m'}{m} a \right)$, $\omega_{m'}^{m'} \tilde{\chi}_m^0 a = \tilde{\chi}_m^0 a \left(m/m'/m'' \right)$, $a \in {}_m[H_0^{q+1}(X)]$. Это определяет гомоморфизмы π и ω для второго слагаемого формулы (7): $\pi_{m'}^{m'} = j_{m'}^{m'}$, $\omega_{m'}^{m'} = i_{m'}^{m'}$. Для первого же слагаемого, являющегося естественной подгруппой левой части формулы (7), $\pi_{m'}^{m'}$ совпадает с вложением $\varphi_{m'}^{m'}$ класса вычетов $\text{mod } m'$ в содержащий его класс вычетов $\text{mod } m(m/m')$, а $\omega_{m'}^{m'}$ с $\psi_{m'}^{m'}(m'/m'')$ — переходом от класса вычетов $\text{mod } m'$ к классу вычетов $\text{mod } m''$ в результате умножения на число $\frac{m''}{m'}$.

Таким образом оказывается определенным модульный спектр групп когомологий пространства X , а потому формула (3) дает группу $H^q(X, G)$:

$$H^q(X, G) \approx ([H_0^q(X)]_m + {}_m[H_0^{q+1}(X)]; \pi, \omega) \otimes ({}_mG; i, j) \approx \\ \approx ([H_0^q(X)]_m; \varphi, \psi) \otimes ({}_mG; i, j) + ({}_m[H_0^{q+1}(X)]; j, i) \otimes ({}_mG; i, j).$$

6. Легко видеть, что $([H_0^q(X)]_m; \varphi, \psi) \otimes ({}_mG; i, j)$ ($m = 0, 1, 2, \dots$) совпадает с $H_0^q(X) \otimes G$. В силу точности последовательности (2) ((²), теорема 40.3) отсюда следует, что $({}_m[H_0^{q+1}(X)]; j, i) \otimes ({}_mG; i, j) \approx H_0^{q+1}(X) * G$, что можно доказать и непосредственно из определения произведения кручения (здесь уже $m \neq 0$, т. е. $m = 1, 2, \dots$). Это дает формулу (3).

Все сказанное применимо также к относительным группам когомологий $X \text{ mod } A$ ($A \subset X$) и внутренним группам когомологий в смысле П. С. Александрова (учитывающим небикомпактность элементов покрытия, (⁶)). Аналогичным образом формулу (3) (с заменой $q+1$ на $q-1$) можно доказать для сингулярных групп гомологий пространства, что, впрочем, уже было известно ранее, так как это вытекает из общих алгебраических результатов ((⁷), гл. VI, теорема 3.3). Для сингулярных групп когомологий и для спектральных групп гомологий формула (3) (и даже точная последовательность (2)) в общем случае места не имеет, как показывают противоречащие примеры в (^{8,1}).

Поступило
17 XII 1957

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ N. E. Steenrod, Am. J. Math., 58, 661 (1936). ² S. Eilenberg, S. Mac Lane, Ann. Math., 43, 757 (1942). ³ М. Ф. Бокштейн, Тр. Московск. матем. общ., 5, 3 (1956). ⁴ М. Бокштейн, ДАН, 37, 275 (1942). ⁵ А. Г. Курош, Теория групп, изд. 2-е, 1953. ⁶ П. Александров, ДАН, 26, № 7, 631 (1940). ⁷ H. Cartan, S. Eilenberg, Homological Algebra, Princeton, 1956. ⁸ F. P. Peterson, Am. J. Math., 78, 243 (1956). ⁹ М. Бокштейн, ДАН, 40, № 9 (1943).

В. Г. БОЛТЯНСКИЙ

ПРИНЦИП МАКСИМУМА В ТЕОРИИ ОПТИМАЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ

(Представлено академиком П. С. Александровым 19 XII 1957)

Настоящая заметка примыкает к нашей совместной работе ⁽¹⁾ по теории оптимальных процессов. Высказанный Л. С. Понтрягиным в качестве гипотезы принцип максимума (на основе проведенного Р. В. Гамкрелидзе исследования вторых вариаций, см. ⁽¹⁾) здесь полностью доказывается как необходимое условие оптимальности. Для получения этого результата приходится заново проводить построения, указанные в заметке ⁽¹⁾, рассматривая иные «возмущения» (вариации).

Рассматривается движение точки $x = (x^1, \dots, x^n)$ в n -мерном фазовом пространстве X по закону:

$$\dot{x} = f^i(x^1, \dots, x^n, u) = f^i(x, u), \quad i = 1, \dots, n, \quad (1)$$

где u есть управляющий параметр, которому предписано изменяться в пределах некоторой области U . «Область» U может быть любым топологическим пространством, например, произвольным замкнутым множеством r -мерного пространства переменной $u = (u^1, \dots, u^r)$; функции f^i предполагаются непрерывно зависящими от пары переменных x, u и непрерывно дифференцируемыми по $x^1, \dots, x^n$. Если задан закон управления, т. е. задана переменная точка $u(t) \in U$, то система (1) однозначно определяет закон движения точки. При этом на управление $u(t)$ мы наложим условие кусочной непрерывности.

Как и в ⁽¹⁾, ставится задача: выбрать управление $u(t)$ таким образом, чтобы точка прошла из заданного положения $x_0 \in X$ в другое заданное положение $x_1 \in X$ за минимальное время. Искомое управление $u(t)$ и соответствующая траектория $x(t)$ называются оптимальными.

Пусть $u(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$, — некоторое управление, проходящее в области U . Выберем некоторые моменты времени $\tau_1, \dots, \tau_k$, где $t_0 < \tau_1 < \dots < \tau_k < t_1$, и пусть $\delta t_{i,j}$, $j = 1, \dots, s_i$, $i = 1, \dots, k$, — произвольные неотрицательные числа, а $v_{i,j}$ — произвольные точки области U . Обозначим через $I_{i,j}$ отрезок

$$\tau_i + \varepsilon(\delta t_{i,1} + \dots + \delta t_{i,j-1}) \leq t < \tau_i + \varepsilon(\delta t_{i,1} + \dots + \delta t_{i,j})$$

и положим

$$\bar{u}(t) = \begin{cases} v_{i,j}, & \text{если } t \in I_{i,j}; \\ u(t), & \text{если } t \text{ не принадлежит ни одному отрезку } I_{i,j}. \end{cases}$$

Здесь ε — положительное число, от которого зависит управление $\bar{u}(t)$. В дальнейшем ε будет считаться переменной величиной первого порядка малости; величины более высокого порядка малости будут отбрасываться и обозначаться многоточием. Будем говорить, что управление $\bar{u}(t)$ получается варьированием управления $u(t)$ вблизи моментов времени $\tau_1, \dots, \tau_k$.

Через $\bar{x}(t)$ обозначим траекторию, исходящую из той же точки x_0 и соответствующую проварьированному управлению $\bar{u}(t)$, и рассмотрим вектор

$$\bar{x}(t_1 - \varepsilon \delta t) - x(t_1), \quad (2)$$

где δt — неотрицательное число. Линейную относительно ε часть вектора (2) обозначим через $\varepsilon \Delta x$:

$$\bar{x}(t_1 - \varepsilon \delta t) = x(t_1) + \varepsilon \Delta x + \dots \quad (3)$$

Если теперь брать всевозможные управления $\bar{u}(t)$, получающиеся варьированием управления $u(t)$, и независимо от этого придавать δt всевозможные неотрицательные значения, то векторы Δx , исходящие из точки $x_1 = x(t_1)$, заполняют некоторый конус с вершиной в точке x_1 . Назовем его конусом достижимости в точке x_1 и обозначим через K . С помощью довольно несложных выкладок доказывается справедливость следующего предложения:

Лемма. Конус достижимости K является выпуклым.

Далее, имеет место следующая теорема (представляющая собой усиление указанной в заметке (1) теоремы о том, что размерность построенного там линейного многообразия P' не превосходит $n - 1$):

Теорема 1. Если конус достижимости K заполняет все пространство X переменных $x^1, \dots, x^n$, то траектория $x(t)$ и соответствующее управление $u(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$, не являются оптимальными.

Таким образом, если $x(t)$, $u(t)$ оптимальны, то выпуклый конус K не заполняет всего пространства X , и потому расположен целиком в одном полупространстве, определяемом некоторой гиперплоскостью, проходящей через точку x_1 . Пусть

$$a_\alpha (x^\alpha - x_1^\alpha) = 0$$

уравнение такой гиперплоскости. Мы можем предположить при этом (поменяв, если нужно, знаки у всех чисел a_α), что весь конус K расположен в отрицательном полупространстве $a_\alpha (x^\alpha - x_1^\alpha) \leq 0$.

Если теперь положить (как и в работе (1)) $a_\alpha \varphi_\beta^\alpha(t_1) = b_\beta$, $b_\beta \psi_\gamma^\beta(t) = \psi_\gamma(t)$, то мы получим $\psi_\alpha(t_1) = a_\alpha$, и уравнение отрицательного полупространства примет вид $\psi_\alpha(t_1) (x^\alpha - x_1^\alpha) \leq 0$. В связи с этим мы получаем следующее необходимое условие оптимальности:

$$\psi_\alpha(t_1) \Delta x^\alpha \leq 0 \quad (4)$$

(где Δx определяется равенством (3)) для любого проварьированного управления $\bar{u}(t)$ и любого $\delta t \geq 0$.

Это условие можно рассматривать как обобщение условий (6), (7) работы (1). При рассматриваемых в работе (1) вариациях $\delta u(t)$ также будет получаться некоторый конус достижимости, который, однако, может оказаться меньше построенного здесь конуса K . В соответствии с этим может оказаться, что числа a_α и функции $\psi_\alpha(t)$, удовлетворяющие всем условиям, данным в работе (1), не удовлетворяют условию (4). Иначе говоря, условие (4) является несколько более сильным, чем условия (6), (7) работы (1).

Из (4) легко вытекает, что имеет место неравенство

$$\psi_\alpha(t_1) f^\alpha(x(t_1), u(t_1)) \geq 0,$$

или, иначе говоря, что функция

$$H(x, \psi, u) = \psi_\alpha f^\alpha(x, u)$$

принимает в точке $(x(t_1), \psi(t_1), u(t_1))$ неотрицательное значение. Как заметил Л. С. Понтрягин, функция $H(x, \psi, u)$ играет существенную роль

в теории оптимальных процессов. В частности, соотношения (1) и (5) работы (1) могут быть переписаны в виде

$$\dot{x}^i = \frac{\partial H}{\partial \psi_i}, \quad \dot{\psi}_i = -\frac{\partial H}{\partial x^i}; \quad i = 1, \dots, n. \quad (5)$$

Теорема 2 (принцип максимума Л. С. Понтрягина). Для оптимальности траектории $x(t)$ и управления $u(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$, необходимо существование такого переменного вектора $\psi(t)$, что (помимо справедливости соотношений (5)) при каждом t , $t_0 \leq t \leq t_1$, выполняется условие

$$H(x(t), \psi(t), u(t)) = \max_{u \in U} H(x(t), \psi(t), u) \geq 0.$$

Приведем эскиз доказательства этой теоремы. Выберем вектор $\psi(t)$ так, как указано выше. Предположим, что для некоторого τ , $t_0 < \tau < t_1$, и некоторого $v \in U$ имеем

$$H(x(\tau), \psi(\tau), u(\tau)) < H(x(\tau), \psi(\tau), v).$$

Проварьируем управление $u(t)$, взяв единственный интервал $I_{1,1}$ длины $\varepsilon \delta t_{1,1}$, начинающийся в точке τ , причем положим $v_{1,1} = v$. Тогда будем иметь: $\bar{x}(t) = x(t)$ при $t_0 \leq t \leq \tau$ и

$$\bar{x}(t) - x(t) = [f(x(\tau), v) - f(x(\tau), u(\tau))](t - \tau) + \dots$$

при $\tau \leq t \leq \tau + \varepsilon \delta t_{1,1}$.

В частности,

$$\bar{x}(\tau + \varepsilon \delta t_{1,1}) - x(\tau + \varepsilon \delta t_{1,1}) = [f(x(\tau), v) - f(x(\tau), u(\tau))]\varepsilon \delta t_{1,1} + \dots,$$

откуда легко следует (в силу определения функции H), что

$$\psi_\alpha(\tau + \varepsilon \delta t_{1,1}) [\bar{x}^\alpha(\tau + \varepsilon \delta t_{1,1}) - x^\alpha(\tau + \varepsilon \delta t_{1,1})] = A\varepsilon + \dots, \quad (6)$$

где $A > 0$. Так как на отрезке $\tau + \varepsilon \delta t_{1,1} < t \leq t_1$ управление $\bar{u}(t)$ совпадает с $u(t)$, то на этом отрезке имеем: $\bar{x}^\alpha(t) = x^\alpha(t) + \varepsilon \delta x^\alpha(t) + \dots$, где

$$\delta \bar{x}^i(t) = \frac{\partial f^i(x(t), u(t))}{\partial x^\alpha} \delta x^\alpha(t), \quad i = 1, \dots, n.$$

Таким образом, при $\tau + \varepsilon \delta t_{1,1} \leq t \leq t_1$ получаем (см. второе из соотношений (5)):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\psi_\alpha(t) \delta x^\alpha(t)) &= \dot{\psi}_\alpha(t) \delta x^\alpha(t) + \psi_\alpha(t) \delta \dot{x}^\alpha(t) = \\ &= -\frac{\partial f^\beta}{\partial x^\alpha} \psi_\beta(t) \delta x^\alpha(t) + \psi_\alpha(t) \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^\beta} \delta x^\beta(t) = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, на всем отрезке $\tau + \varepsilon \delta t_{1,1} \leq t \leq t_1$ справедливо соотношение

$$\psi_\alpha(t) \delta x^\alpha(t) = \psi_\alpha(\tau + \varepsilon \delta t_{1,1}) \delta x^\alpha(\tau + \varepsilon \delta t_{1,1}) = A > 0$$

(см. (6)), и потому

$$\psi_\alpha(t_1) [\bar{x}^\alpha(t_1) - x^\alpha(t_1)] = \psi_\alpha(t_1) [\varepsilon \delta x^\alpha(t_1) + \dots] = A\varepsilon + \dots$$

Таким образом, вектор $\Delta x = \delta x(t_1)$, получаемый по формулам (2), (3) при $\delta t = 0$ (что допустимо), удовлетворяет условию $\psi_\alpha(t_1) \Delta x^\alpha = A > 0$. Но это противоречит необходимому условию (4).

В тесной связи с принципом максимума находится следующее важное свойство функции H , из которого, в частности, следует, что вдоль опти-

мальной траектории $H \geq 0$, т. е. что максимум, существование которого выше было показано, является неотрицательным.

Теорема 3. Если $x(t)$ — оптимальная траектория, $u(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$, — соответствующее оптимальное управление, а $\psi(t)$ — переменный вектор, существование которого утверждается в теореме 2, то величина H сохраняет вдоль $x(t)$, $\psi(t)$, $u(t)$ постоянное (неотрицательное) значение:

$$H(x(t), \psi(t), u(t)) = \text{const.}$$

Это соотношение доказывается сначала для каждого участка непрерывности управления $u(t)$. Затем устанавливается, что в каждой точке «скачка» (т. е. в точке разрыва управления $u(t)$) функция H не меняет своего значения.

Публикуемые здесь результаты получены мною при работе в руководимом Л. С. Понтрягиным семинаре по теории колебаний и автоматического регулирования. Л. С. Понтрягин указал мне на одно упрощение в доказательстве принципа максимума, благодаря чему мое доказательство стало пригодным для произвольного топологического пространства U (первоначальный вариант доказательства содержал лишнюю, нигде фактически не использовавшуюся конструкцию, которая заставляла ограничиваться случаем, когда U есть замкнутая область векторного пространства с кусочно-гладкой границей и выпуклыми внутренними углами в точках перелома).

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступило
18 XII 1957

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ Б. Л. Долтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Л. С. Понтрягин, ДАН, 110, № 1, 7 (1956).

С. И. ЗУХОВИЦКИЙ и Г. И. ЭСКИН

ЗАДАЧА ЧЕБЫШЕВСКОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ В КОММУТАТИВНОМ ГИЛЬБЕРТОВОМ КОЛЬЦЕ

(Представлено академиком Н. Н. Боголюбовым 4 XII 1957)

1. Пусть $\varphi_1(q), \dots, \varphi_n(q)$ — непрерывные на некотором компакте Q функции со значениями в бесконечномерном коммутативном гильбертовом кольце H . Любой элемент $a \in H$ имеет вид $a = \sum_{\alpha} a_{\alpha} e_{\alpha}$, где коэффициенты a_{α} — комплексные числа, а $\{e_{\alpha}\}$ — базис из взаимно ортогональных неприводимых эрмитовых идемпотентов ⁽¹⁾. Функции $\varphi_k(q)$ ($k = 1, 2, \dots, n$) имеют вид

$$\varphi_k(q) = \sum_{\alpha} \varphi_{\alpha k}(q) e_{\alpha},$$

где $\varphi_{\alpha k}(q)$ — непрерывные на Q комплекснозначные функции.

Непрерывную на Q функцию $f(q)$ со значениями в H будем наилучшим образом приближать при помощи полиномов вида $\sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(q)$, где $a_1, \dots, a_n$ — элементы из H , т. е. будем искать среди них такой полином $\sum_{k=1}^n a_k^{(0)} \varphi_k(q)$, для которого

$$\max_{q \in Q} \left\| \sum_{k=1}^n a_k^{(0)} \varphi_k(q) - f(q) \right\| = \inf_{a_k \in H} \max_{q \in Q} \left\| \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(q) - f(q) \right\|.$$

Случай конечномерного кольца рассмотрен в ⁽²⁾.

2. Обозначим через T множество всех комплексов $a = (a_1, \dots, a_n)$, где $a_k \in H$ ($k = 1, 2, \dots, n$), для которых $\sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(q) \equiv \theta$ на Q .

Ясно, что T — подпространство гильбертова пространства H^n с нормой $\|a\|_{H^n} = \left(\sum_{k=1}^n \|a_k\|^2 \right)^{1/2}$. Через S обозначим ортогональное дополнение к T в H^n .

Заметив, что приближение при помощи полинома $\sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(q)$ может быть рассмотрено как приближение при помощи оператор-функции $A(q)$, являющейся при каждом $q \in Q$ линейным ограниченным оператором, действующим из H^n в H по формуле $A(q)a = \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(q)$, мы из ^(3,4) получим, что для существования для каждой непрерывной функции полинома

наименьшего уклонения необходимо и достаточно выполнение условия

$$\max_{q \in Q} \left\| \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(q) \right\| \geq m \left(\sum_{k=1}^n \|a_k\|^2 \right)^{1/2} \text{ для всех } (a_1, \dots, a_n) \in S, \tag{a}$$

где $m > 0$ — постоянная. Из этого условия вытекает следующая теорема.

Теорема 1. Для того чтобы для каждой непрерывной на Q функции $f(q)$ со значениями в H существовал полином наименьшего уклонения, необходимо и достаточно, чтобы подпространство S было конечномерным или, что то же, чтобы каждая из функций $\varphi_k(q) = \sum_{\alpha} \varphi_{\alpha k}(q) e_{\alpha}$ ($k = 1, 2, \dots, n$) имела лишь конечное число коэффициентов $\varphi_{\alpha k}(q)$, не тождественно равных нулю на Q .

3. Обозначим через L множество индексов α таких, что $\varphi_{\alpha k}(q) \neq 0$ на Q хотя бы для одного $k = 1, 2, \dots, n$. Число l таких индексов, по предыдущей теореме, конечно и $\dim S \leq nl$.

Теорема 2. Если размерность подпространства S кратна l : $\dim S = tl$, то для того, чтобы для каждой непрерывной функции $f(q)$ существовал

единственный наименее уклоняющийся от нее полином $\sum_{k=1}^n a_k^{(0)} \varphi_k(q)$, где $(a_1^{(0)}, \dots, a_n^{(0)}) \in S$, необходимо и достаточно, чтобы каждый полином $\sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(q)$, у которого $\sum_{k=1}^n \|a_k\| > 0$ и $(a_1, \dots, a_n) \in S$, обращался в нуль не более чем в $t - 1$ в точках компакта Q .

Доказательство этой теоремы можно получить, рассматривая полином $\sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(q)$ ($(a_1, \dots, a_n) \in S$) как оператор-функцию, действующую из конечномерного пространства в конечномерное, как в (4).

Случай, когда H конечномерно и $\dim S = n \dim H$, рассмотрен в (2).

Замечание. Если $\dim S$ не кратна l , то вопрос о единственности

усложняется, и, кроме ограничений на число нулей полиномов $\sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(q)$ $\left(\sum_{k=1}^n \|a_k\| > 0 \right)$, нужны еще дополнительные ограничения в духе (5).

4. Допустим теперь, что непрерывные на Q функции $\varphi_1(q), \dots, \varphi_n(q)$ со значениями в H таковы, что соответствующее подпространство S бесконечномерно, в частности, $S = H^n$ (в этом последнем случае функции $\varphi_1(q), \dots, \varphi_n(q)$ «линейно независимы» на Q в том смысле, что $\sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(q) \equiv \theta$ лишь при $a_1 = \dots = a_n = \theta$).

Заметив, что S всегда сепарабельно (даже когда H несепарабельно), будем для удобства считать H сепарабельным и $S = H^n$.

По теореме 1, теперь не для каждой непрерывной на Q со значениями в H функции $f(q)$ существует полином наименьшего уклонения. Обозначим через F_{φ} множество тех непрерывных на Q со значениями в H функций, для которых эти полиномы существуют. Отметим, что F_{φ} плотно в $C(H, Q)$ — банаховом пространстве всех непрерывных на Q функций со значениями в H .

Теорема 3. Пусть непрерывные функции $\varphi_1(q), \dots, \varphi_n(q)$ таковы, что каждый полином $\sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(q)$ $\left(\sum_{k=1}^n \|a_k\| > 0 \right)$ обращается в нуль не более чем в $n - 1$ точках компакта Q (содержащего более чем n точек).

Тогда для того, чтобы полином $\sum_{k=1}^n a_k^{(0)} \varphi_k(q)$ наименее уклонялся на Q от функции $f(q) \in F_\varphi$, необходимо, чтобы уклонение

$$\max_{q \in Q} \left\| \sum_{k=1}^n a_k^{(0)} \varphi_k(q) - f(q) \right\|$$

достигалось не менее чем в $n+1$ точках компакта Q .

Теорема 4. Для того чтобы для любой функции $f(q) \in F_\varphi$ существовал единственный полином наименьшего уклонения, необходимо и до-

статочно, чтобы каждый полином $\sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(q)$ ($\sum_{k=1}^n \|a_k\| > 0$) обращался

в нуль не более чем в $n-1$ точках компакта Q . Это условие эквивалентно тому, чтобы при каждом $\alpha = 1, 2, \dots$ числовые функции $\varphi_{\alpha_1}(q), \varphi_{\alpha_2}(q), \dots$

$\dots, \varphi_{\alpha n}(q)$, где $\varphi_k(q) = \sum_{\alpha=1}^{\infty} \varphi_{\alpha k}(q) e_\alpha$ ($k = 1, 2, \dots, n$), образовывали на Q систему Чебышева.

5. Как следует из теоремы 1, для того, чтобы для каждой непрерывной на Q со значениями в H функции $f(q)$ при приближении ее в H функциями $a\varphi(q)$ существовала наименее уклоняющаяся функция $a^{(0)}\varphi(q)$, приходится на функцию $\varphi(q) = \sum_{\alpha} \varphi_{\alpha}(q) e_{\alpha}$ накладывать весьма ограничительное условие (чтобы лишь конечное число коэффициентов $\varphi_{\alpha}(q)$ было не тождественно равно нулю на Q).

Если же в качестве приближающей функции брать не функцию $a\varphi(q)$, а функцию вида $\lambda a - a\varphi(q)$, где $\lambda \neq 0$ — какое-нибудь комплексное число, то, как установлено в ⁽⁶⁾, из одной лишь непрерывности функции $\varphi(q)$ уже следует существование наименее уклоняющейся функции $\lambda a^{(0)} - a^{(0)}\varphi(q)$ для каждой непрерывной функции $f(q)$, и для того, чтобы для любой непрерывной функции $f(q)$ существовала единственная функция $\lambda a^{(0)} - a^{(0)}\varphi(q)$ ($a^{(0)} \in H$) наименьшего уклонения, необходимо и достаточно, чтобы при любом $a \neq \theta$ из H функция $\lambda a - a\varphi(q)$ нигде не обращалась в нуль на Q , что равносильно условию, чтобы для каждого α во всех точках Q компакта Q было $\varphi_{\alpha}(q) \neq \lambda$.

Таким образом, какова бы ни была непрерывная функция $\varphi(q)$, выбор λ такого, чтобы $|\lambda| > \max_{q \in Q} \|\varphi(q)\|$, обеспечивает единственность функции наименьшего уклонения для любой приближаемой непрерывной функции.

Луцкий государственный педагогический институт
им. Леси краинки

Поступило
2 XII 1957

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Л. Л ю м и с, Введение в абстрактный гармонический анализ, М., 1956. ² С. И. З у х о в и ц к и й, М. Г. К р е й н, Усп. матем. наук, 5, в. 1 (35), 217 (1950). ³ С. И. З у х о в и ц к и й, Матем. сборн., 37, 79, 1, 3 (1955). ⁴ С. И. З у х о в и ц к и й, Г. И. Э с к и н, ДАН, 118, № 5 (1958). ⁵ С. И. З у х о в и ц к и й, С. Б. С т е ч к и н, ДАН, 106, № 3, 385 (1956). ⁶ С. И. З у х о в и ц к и й, Некоторые вопросы теории чебышевских приближений, Диссертация, Киев, 1950.

Е. К. ИСАКОВА

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 11 XII 1957)

1. Рассмотрим поведение при $\varepsilon \rightarrow 0$ ($\varepsilon > 0$) решения $u^\varepsilon(x, t)$ следующей задачи Коши:

$$L_\varepsilon u^\varepsilon(x, t) = \varepsilon \sum A_{ij}(x, t) \frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial x_i \partial x_j} + \sum B_j(x, t) \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_j} + C(x, t) u^\varepsilon - \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} = 0, \quad (1)$$

$$u^\varepsilon(x, t)|_{t=0} = \Psi(x), \quad (2)$$

где $x = (x_1, \dots, x_n)$ — точка n -мерного пространства E^n ; $t \in [0, T]$; $A_{ij}(x, t)$, $B_i(x, t)$, $C(x, t)$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, предполагаются ограниченными вместе с производными до $2n$ -го порядка по всем x_i , $i = 1, 2, \dots, n$; кроме того, существуют и ограничены $\partial A_{ij} / \partial t$, $\partial B_j / \partial t$, $i, j = 1, 2, \dots, n$; во всякой

точке $(x, t) \in E^n \times [0, T]$ $\sum A_{ij}(x, t) \xi_i \xi_j \geq \alpha \sum \xi_i^2$, $\alpha > 0$. $\Psi(x)$ всюду

в E^n , за исключением точек некоторой поверхности $F(x) = 0$, имеет ограниченные производные до $2n$ -го порядка. На поверхности $F(x) = 0$ функция $\Psi(x)$ и все ее производные до n -го порядка имеют разрыв первого рода (поведение производных более высокого порядка на $F(x) = 0$ нас не интересует). Поверхность $F(x) = 0$ обладает той же гладкостью, что и коэффициенты уравнения (1), кроме того, ее пересекает всякая прямая, параллельная оси x_1 , и притом только в одной точке.

Обозначим через $v(x, t)$ решение задачи (1) — (2) при $\varepsilon = 0$ (назовем ее задачей (1^0) — (2^0)), а через $l(x, t)$ — характеристику уравнения (1^0) , проходящую через точку (x, t) . Тогда вдоль каждой характеристики уравнения (1^0) , проходящей через поверхность $F(x) = 0$ (назовем ее характеристикой разрыва), решение $v(x, t)$ будет разрывным. (Сходимость решения $u^\varepsilon(x, t)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ задачи (1) — (2), а также других задач, которые будут рассмотрены ниже, к решению $v(x, t)$ задачи (1^0) — (2^0) во всех точках непрерывности функции $v(x, t)$ не рассматриваем, так как она доказана в (1) даже для решений нелинейных параболических уравнений.)

Определение. Главную по ε при $\varepsilon \rightarrow 0$ часть разности $u^\varepsilon(x, t) - v(x, t)$ назовем «внутренним параболическим пограничным слоем».

Найдем внутренний параболический пограничный слой и асимптотику по ε для $u^\varepsilon(x, t)$ в окрестности любой характеристики разрыва.

Заменяя x и t соответственно на y и τ , где τ — длина дуги характеристики $l(x, t)$ между точками $(y, 0)$ и (x, t) , а $y = (y_1, \dots, y_n)$ — координаты точки пересечения $l(x, t)$ с плоскостью $t = 0$, получим

$$L_\varepsilon u^\varepsilon(y, \tau) \equiv \varepsilon \sum a_{ij}(y, \tau) \frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial y_i \partial y_j} + c(y, \tau) u^\varepsilon - \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial \tau} = 0, \quad (1')$$

$$u^\varepsilon(y, \tau)|_{\tau=0} = \psi(y); \quad y = (y_1, \dots, y_n) \in E^n, \quad \tau \in [0, T_1]; \quad (2')$$

при этом поверхность $F(x) = 0$ переходит в поверхность $f(y) = 0$, на которой $\psi(y)$ разрывна вместе со всеми своими производными до n -го порядка. В окрестности $f(y) = 0$ введем локальные координаты φ и ρ : $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1})$ — координаты на поверхности $f(y) = 0$, ρ — длина нормали в соответствующей точке $(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1})$. Тогда (1') — (2') перейдет в

$$L_\varepsilon u^\varepsilon(\rho, \varphi, \tau) \equiv \bar{L}_\varepsilon u^\varepsilon + \sigma(\sqrt{\varepsilon}, u^\varepsilon), \quad u^\varepsilon(\rho, \varphi, \tau)|_{\tau=0} = \tilde{\psi}(\rho, \varphi),$$

где

$$\bar{L}_\varepsilon u^\varepsilon \equiv \varepsilon \tilde{a}(\rho, \varphi, \tau) \frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial \rho^2} + \tilde{c}(\rho, \varphi, \tau) u^\varepsilon - \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial \tau}, \quad \sigma(\sqrt{\varepsilon}, u^\varepsilon) = O(\sqrt{\varepsilon}).$$

Теорема 1. Для решения u^ε задачи (1) — (2) в окрестности всякой характеристики разрыва справедливо представление

$$u^\varepsilon = z_0^\varepsilon + z_1^\varepsilon + \dots + z_n^\varepsilon + O(\sqrt{\varepsilon^{n+1}}),$$

где z_k^ε , $k = 0, 1, \dots, n$, определяются рекуррентно:

$$\begin{aligned} \bar{L}_\varepsilon z_0^\varepsilon &= 0, \quad z_0^\varepsilon|_{\tau=0} = \tilde{\psi}(\rho, \varphi), \quad \bar{L}_\varepsilon z_k^\varepsilon = -\sigma(\sqrt{\varepsilon}, z_{k-1}^\varepsilon), \quad z_k^\varepsilon|_{\tau=0} = 0, \\ k &= 1, 2, \dots, n, \end{aligned}$$

причем z_0^ε имеет асимптотику по ε , найденную в (2), а $z_k^\varepsilon = O(\sqrt{\varepsilon^k})$.

2. Перейдем к изучению поведения при $\varepsilon \rightarrow 0$ решения $u^\varepsilon(x, t)$ уравнения (1), удовлетворяющего условиям

$$u^\varepsilon(x, t)|_{t=0} = \Psi_1(x); \quad u^\varepsilon(x, t)|_{x_1=0} = \Psi_2(x_2, \dots, x_n, t), \quad (3)$$

где $(x, t) \in D$ ($0 \leq x_1 < \infty$, $0 \leq t \leq T$); $\Psi_1(x)$ и $\Psi_2(x_2, \dots, x_n, t)$ ограничены и имеют ограниченные производные по всем x_i , $i = 1, 2, \dots, n$, до $2n$ -го порядка, причем $\Psi_1(0, x_2, \dots, x_n) = \Psi_2(x_2, \dots, x_n, 0)$, и $B_1(x, t) < 0$. Тогда решение $v(x, t)$ задачи (1) — (3) при $\varepsilon = 0$ будет непрерывным, а его первые производные на характеристиках, выходящих с $(n-1)$ -мерной плоскости $t = 0$, $x_1 = 0$ (характеристиках разрыва), могут иметь разрыв первого рода. В этом случае для производных решения u^ε в окрестности таких характеристик можно наблюдать явление внутреннего параболического пограничного слоя. Найдем асимптотику по ε в окрестности всякой характеристики разрыва для решения u^ε и его первых производных.

При замене x и t на y и τ плоскость $x_1 = 0$ переходит в некоторую поверхность Γ , которая пересекается с $y_1 = 0$ по $(n-1)$ -мерной плоскости $\tau = 0$, $y_1 = 0$, область D — в область D' , а условие (3) — в условие

$$u^\varepsilon(y, \tau)|_{\tau=0} = \psi_1(y); \quad u^\varepsilon(y, \tau)|_{\Gamma} = \psi_2. \quad (3')$$

В этом случае роль поверхности разрыва будет играть $\tau = 0$, $y_1 = 0$, а $\bar{L}_\varepsilon u^\varepsilon = \varepsilon a_{11}(y, \tau) u_{y_1 y_1}^\varepsilon + c(y, \tau) u^\varepsilon - u_\tau^\varepsilon$. Если z_0^ε — решение $\bar{L}_\varepsilon z_0^\varepsilon = 0$ при условии (3') ($y_2, y_3, \dots, y_n$ рассматриваются как параметры), а z_k^ε — решения $\bar{L}_\varepsilon z_k^\varepsilon = -\sigma(\sqrt{\varepsilon}, z_{k-1}^\varepsilon)$, $k = 1, 2, \dots, n$, при однородных условиях (3'), то

$$u^\varepsilon(y, \tau) = z_0^\varepsilon + z_1^\varepsilon + \dots + z_n^\varepsilon + O(\sqrt{\varepsilon^{n+1}}), \quad (4)$$

где $z_k^\varepsilon = O(\sqrt{\varepsilon^k})$, $k = 1, 2, \dots, n$.

Остается изучить поведение z_0^ε при $\varepsilon \rightarrow 0$, т. е. поведение при $\varepsilon \rightarrow 0$ решения задачи (1') — (3') для $n = 1$ (обозначим решение такой задачи через $\omega^\varepsilon(y, \tau)$). Будем предполагать коэффициенты уравнения (1') заданными для всех y и $\tau > 0$, поэтому $v(y, \tau)$ можно считать определенным для всех y и $\tau > 0$. Обозначим через $\omega_0^\varepsilon(y, \tau)$ решение (1'), удовле-

творяющее условию $\omega_0^\varepsilon(y, \tau)|_{\tau=0} = v(y, \tau)|_{\tau=0}$; тогда $\omega_0^\varepsilon(y, \tau)$ и $\omega^\varepsilon(y, \tau)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ сходятся в области D' к одному и тому же предельному решению $v(y, \tau)$, и можно показать, что $\omega_0^\varepsilon(y, \tau) - \omega^\varepsilon(y, \tau) = O(\varepsilon)$ при $(y, \tau) \in D'$. Определим ω_k^ε , $k = 1, 2, \dots, n$, как решения уравнения (1') при условиях $\omega_k^\varepsilon|_{\tau=0} = v_k|_{\tau=0}$, где $v_0(y, \tau) \equiv v(y, \tau)$, а $v_k(y, \tau)$, $k = 1, 2, \dots, n$, — решения (1') при $\varepsilon = 0$, удовлетворяющие соответственно условиям $v_k(y, \tau)|_{\tau=0} = 0$, $v_k(y, \tau)|_\Gamma = (v_{k-1} - \omega_{k-1}^\varepsilon)|_\Gamma$; тогда $\omega_k^\varepsilon(y, \tau) = O(\varepsilon^k)$, $k = 1, 2, \dots, n$.

Теорема 2. Для решения $\omega^\varepsilon(y, \tau)$ и его производной $\partial \omega^\varepsilon(y, \tau) / \partial y$ в окрестности $y = 0$ имеют место представления

$$\omega^\varepsilon(y, \tau) = \omega_0^\varepsilon(y, \tau) + \omega_1^\varepsilon(y, \tau) + \dots + \omega_n^\varepsilon(y, \tau) + O(\varepsilon^{n+1}) \quad \text{для } \tau \in [0, T_1],$$

$$\frac{\partial \omega^\varepsilon(y, \tau)}{\partial y} = \frac{\partial \omega_0^\varepsilon(y, \tau)}{\partial y} + \frac{\partial \omega_1^\varepsilon(y, \tau)}{\partial y} + \dots + \frac{\partial \omega_n^\varepsilon(y, \tau)}{\partial y} + O\left(\varepsilon^n \sqrt{\frac{\varepsilon}{\tau}}\right)$$

$$\text{для } 0 < \tau \leq T_1,$$

где решения $\omega_k^\varepsilon(y, \tau) = O(\varepsilon^k)$ найдены выше, причем $\frac{\partial \omega_k^\varepsilon(y, \tau)}{\partial y} = O(\varepsilon^k / \sqrt{\varepsilon \tau})$, $k = 1, 2, \dots, n$, а $\partial \omega_0 / \partial y$ имеет асимптотику по ε , найденную в (2).

В общем случае, когда $n > 1$, справедлива следующая теорема.

Теорема 3. Для решения u^ε задачи (1') — (3') (а значит, и задачи (1) — (3)) в окрестности всякой характеристики разрыва имеет место представление вида (4), причем $z_0^\varepsilon(y, \tau)$ удовлетворяет теореме 2.

3. Аналогичные результаты с некоторыми изменениями можно получить при изучении поведения при $\varepsilon \rightarrow 0$ решения $u^\varepsilon(x, t)$ уравнения (1), удовлетворяющего условиям

$$u^\varepsilon(x, t)|_{t=0} = \Psi_1(x); \quad u^\varepsilon(x, t)|_S = \Psi_2, \quad x \in \Omega, \quad t \in [0, T], \quad (5)$$

где Ω — некоторая область в пространстве $x_1, \dots, x_n$; S — ее граница. Для простоты ограничимся случаем $n = 1$, тогда (5) принимает вид

$$u^\varepsilon(x, t)|_{t=0} = \Psi_1(x); \quad u^\varepsilon(x, t)|_{x=0} = \Psi_2(t); \quad (6)$$

$$u^\varepsilon(x, t)|_{x=1} = \Psi_3(t), \quad (7)$$

где $x \in [0, 1]$, $t \in [0, T]$; $\Psi_1(x)$ и $\Psi_2(t)$ n раз непрерывно дифференцируемы и ограничены вместе со всеми своими производными; $\Psi_3(t)$ непрерывна и ограничена; $\Psi_3(0) = \Psi_1(1)$; $\Psi_1(0) = \Psi_2(0) = 0$; коэффициент $B_1(x, t) < 0$. Пусть $v(x, t)$ — решение (1) — (6) при $\varepsilon = 0$. Тогда вдоль характеристики $l(0, 0)$ первые производные решения $v(x, t)$ могут иметь разрыв первого рода. В этом случае для производных решения $u^\varepsilon(x, t)$ в окрестности $l(0, 0)$ наблюдается явление внутреннего параболического пограничного слоя. Кроме того, так как $v(x, t)$ не удовлетворяет (7), то в окрестности $x = 1$ для решения $u^\varepsilon(x, t)$ наблюдается еще и другое явление — явление внешнего пограничного слоя (3).

Найдем асимптотику по ε для решения $u^\varepsilon(x, t)$ и его первых производных в окрестности $l(0, 0)$. Будем предполагать $\Psi_1(x)$ и $\Psi_2(t)$ заданными соответственно для всех $x \geq 0$ и $t \geq 0$. Обозначим через $\bar{u}^\varepsilon(x, t)$ решение (1) — (6) для $x \geq 0$, $t \in [0, T]$; тогда при $\varepsilon \rightarrow 0$ $\bar{u}^\varepsilon(x, t)$ и $u^\varepsilon(x, t)$ сходятся к $v(x, t)$ для $0 \leq x < 1$. Оказывается, можно построить функцию

$\omega^\varepsilon(x, t)$, которая гасит неувязку граничных условий при $x = 1$ между $\bar{u}^\varepsilon(x, t)$ и $u^\varepsilon(x, t)$ (т. е. $(\bar{u}^\varepsilon(x, t) - u^\varepsilon(x, t))|_{x=1}$), и $u^\varepsilon(x, t) = \bar{u}^\varepsilon(x, t) + \omega^\varepsilon(x, t) + O(\varepsilon^{n+1})$ при $x \in [0, 1]$, $t \in [0, T]$. Функция $\omega^\varepsilon(x, t)$ имеет вид внешнего пограничного слоя и строится методом, разработанным Л. А. Люстерником и М. И. Вишиком⁽³⁾. При этом соответствующая асимптотика для первых производных решения $u^\varepsilon(x, t)$ в окрестности $l(0, 0)$ вне некоторых окрестностей начала координат и точки пересечения $l(0, 0)$ с $x = 1$ получается дифференцированием только $\bar{u}^\varepsilon(x, t)$.

В случае $n > 1$ проводятся аналогичные рассуждения.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
9 XII 1957

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ О. А. О л е й н и к, Усп. матем. наук, 10, в. 3 (65), 229 (1955). ² Е. К. И с а к о в а, ДАН, 117, № 6, (1957). ³ М. И. В и ш и к, Л. А. Л ю с т е р н и к, Усп. матем. наук, 12, 5, 77 (1957)

А. И. КОСТРИКИН

О ПРОБЛЕМЕ БЕРНСАЙДА

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 4 III 1958)

Существует ли среди конечных групп с данным числом q образующих и тождественным соотношением $x^p = 1$ (p — простое) группа некоторого максимального порядка, зависящего только от q и p ?

Такой вопрос, известный под названием ослабленной проблемы Бернсайда для простого показателя p , давно привлекает к себе внимание, как из-за перспектив, открываемых им в области классификации конечных p -групп, так и по той причине, что он является частью общей теоретико-групповой задачи о совпадении классов локально-конечных групп, с одной стороны, и периодических — с другой ⁽¹⁾. Ответ на него получен, однако, лишь для некоторых специальных значений p . Автором решена ослабленная проблема Бернсайда сначала при $q = 2$ и $p = 5$ ⁽²⁾ (первый нетривиальный случай), а затем при произвольном q для $p = 5$ ⁽³⁾ и $p = 7$ ⁽⁴⁾. Группы с $p = 5$ рассмотрены также (независимо и примерно в одно и то же время с ⁽³⁾) Хигманом ⁽⁵⁾.

В настоящей заметке ослабленная гипотеза Бернсайда доказана для всех простых показателей p .

Как здесь, так и в указанных выше работах используется связь, установленная ранее рядом авторов (литературу см. ^(2,4)), между периодическими группами и кольцами Ли, а именно тот факт, что ослабленная проблема Бернсайда для простого показателя p является частным случаем (поскольку речь идет о ее положительном решении) следующей задачи «бернсайдовского типа» из теории колец Ли. Будет ли нильпотентным кольцо Ли характеристики p , если оно имеет конечное число образующих и удовлетворяет n -му условию Энгеля, $n < p$, т. е. для любых двух его элементов выполнено соотношение $[[uv]v] \dots v = [uv^n] = 0$?

В нашей заметке ⁽⁶⁾ сообщалось о доказательстве локальной нильпотентности колец Ли с n -м условием Энгеля и характеристикой $p > n + [n/2]$ (или $p = 0$). Там было отмечено, что обобщение этого результата на более широкий класс колец Ли с характеристикой $p > n$ связано с нахождением в любом таком кольце $\mathfrak{L}$ элемента $c_{(2)}$ — второго члена последовательности $[c_{(1)}, c_{(2)}, \dots, c_{(m)}, \dots]$, характеризующей соотношениями:

$$c_{(m)} \neq 0, \quad c_{(m)} u^\alpha c_{(m)} = 0, \quad \alpha = 0, 1, \dots, 2m-1, \quad 1 \leq m \leq \left[\frac{n-1}{2} \right], \quad u \in \mathfrak{L}.$$

А priori не ясно, существует ли на самом деле хотя бы элемент $c_{(1)}$. Известно еще из работы ⁽⁴⁾, что вместе с $c_{(m)}$ тем же тождествам удовлетворяет и любой одночлен вида $c'_{(m)} = [c_{(m)} u^{2m+1} c_{(m)}]$. Если же $c'_{(m)} = 0$ при любом u из $\mathfrak{L}$, то $c_{(m)}$ можно брать в качестве элемента $c_{(m+1)}$. Это обстоятельство наводит на мысль строить последовательность $c_{(1)}, c_{(2)}, \dots$ рекуррентно, «итерлируя» каждый отдельный член с помощью предыдущего.

Доказано, что при $m \geq 2$ указанный путь очень быстро приводит к цели: элемент $c_{(m+1)}$ находится в тройке

$$c_{(m)}, \quad c'_{(m)} = [c_{(m)} a^{2m+1} c_{(m)}], \quad [c'_{(m)} b^{2m+1} c'_{(m)}].$$

Так как главный идеал $\mathfrak{N} = \{c_{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor}\}$ является коммутативным, то точный смысл этого утверждения заключается в следующем. Если в энгелевом кольце Ли $\mathfrak{L}$ с характеристикой $p > n$ имеется элемент $c_{(2)}$, то $N(\mathfrak{L}) \neq 0$. Здесь $N(\mathfrak{L})$ — радикал кольца $\mathfrak{L}$ или сумма его локально нильпотентных идеалов.

Без дополнительных ограничений, накладываемых в работе ⁽⁶⁾ на характеристику кольца, доказательство существования элемента $c_{(2)}$ требует известных усилий и в нашем кратком изложении оно не всегда легко прослеживается. Впрочем, можно заметить, что над всеми рассуждениями довлеет метод итерирования, понимаемый лишь в более широком смысле, чем раньше. Конструируемые элементы почти каждый раз заменяются другими, при этом свойства первых не только воспроизводятся, но и постепенно улучшаются в нужную сторону. Добавим еще, что доказательство основной теоремы ведется от противного, поэтому для удобства в теоремах 1 и 2 под $\mathfrak{L}$ следует понимать ненулевое энгелево ($n < p$) кольцо без радикала, изоморфно представленное своим кольцом внутренних дифференцирований. Это соглашение оправдывает некоторую вольность в нашем обращении с лиевскими элементами в соответствующем обертывающем кольце $\mathfrak{U}_{\mathfrak{L}}$.

Теорема 1. В любом энгелевом кольце Ли $\mathfrak{L}$ характеристики $p > n$ можно найти элемент $c \neq 0$ второго порядка: $c^2 = 0$.

В самом деле, $u^n = 0$ для всех u из $\mathfrak{L}$.

Пусть $v^m = 0$, $4 \leq m \leq n$. Без особого труда проверяется тождество $[uv^{m-1}]^{m-1} = 0$. После конечного числа таких спусков придем к элементу $b \neq 0$ третьего порядка: $b^3 = 0$. Легко видеть, что $[ub^2]^2 = b^2 u^2 b^2$, поэтому нашу цель можно считать достигнутой, если $b^2 u^2 b^2 = 0$. Роль искомого элемента c выполнит тогда либо b , либо некоторый одночлен $[ab^2] \neq 0$. Но пока мы не знаем даже, сколь длинными могут быть отличные от нуля произведения вида $b^2 (u^2 b^2)^k$. Введем обозначение: $g_m(u) = [u [bu]^m b^2]$, u — произвольный элемент из $\mathfrak{L}$. Оказывается, что имеет место соотношение

$$(g_m(u))^2 = b^2 (u^2 b^2)^{m+1}.$$

Так как $g_{n-1}(u) = (-1)^{n-1} [b [bu]^n] = 0$, то тем самым дается ответ на поставленный выше вопрос: $b^2 (u^2 b^2)^t = 0$, $t \leq n$.

Будем разыскивать теперь такие элементы третьего порядка, для которых последнее тождество выполнялось бы при все более низком показателе t . Пусть $g_m(f) \neq 0$, но $g_{m+1}(f) = 0$ (f — некоторый фиксированный элемент). Положив $a = [f [bf]^m]$ и $b_0 = [ab^2] \neq 0$, мы легко обнаруживаем связь между элементами b_0 , a и b , дающую ключ к индукции: $[b_0 ab] = 0$. Простые рассуждения, основанные на использовании этого соотношения, показывают, что $b_0^2 (u^2 b_0^2)^s = 0$, $s = \lfloor t/2 \rfloor$. Повторив несколько раз подобную процедуру, придем, в конце-концов, к элементу b_v третьего порядка, который удовлетворяет тождеству $b_v^2 u^2 b_v^2 = 0$.

Теорема 1 доказана.

Теорема 2. В любом энгелевом кольце $\mathfrak{L}$ характеристики $p > n$ существует элемент $c_{(2)}$.

Доказательство. Сделаем сначала небольшое замечание. Если $cu^\alpha c = 0$, $\alpha = 0, 1, \dots, 2k$, то также $cu^{2k+1}c = 0$. В частности, свойство c быть элементом второго порядка означает также, что $cuc = 0$, а элемент $c_{(2)}$ вполне определяется тождествами: $c_{(2)}^2 = c_{(2)} u^2 c_{(2)} = 0$.

Будем исходить из элемента $c_{(1)} = c$, существование которого обеспечено теоремой 1. Если $cu^2c = 0$, то, согласно сделанному замечанию, доказательство на этом заканчивается.

1) Можно встать на несколько более общую точку зрения и поинтересоваться следствиями соотношения $A_m = cu_1^2cu_2^2c \dots cu_m^2c = 0$ при некотором конечном индексе m и любых $u_i \in \mathfrak{L}$.

В таком случае имеет место следующий факт.

Если $A_{m-1} \neq 0$, но $A_m = 0$, то

$$c_0^2 = c_0u^2c_0v^2c_0 = 0, \quad \text{где } c_0 = [ca_1^3ca_2^2c \dots ca_{m-1}^2c] \neq 0.$$

И далее: последний отличный от нуля одночлен в ряду $c_0, c_{i+1} = [c_ia_i^3c_i]$, $i = 0, 1, 2$; $a_i \in \mathfrak{L}$, можно взять в качестве элемента $c_{(2)}$.

Остается предположить, что существует произведение $A_m \neq 0$ со сколь угодно большим номером m .

2) Это обстоятельство, как можно доказать, приводит нас к следующему выводу. Найдутся два элемента $c_i = [ca_i^3c]$, $a_i \in \mathfrak{L}$, $i = 1, 2$, которые удовлетворяют условиям $c_1^2 = c_2^2 = [c_1c_2] = 0$, $c_1c_2 \neq 0$.

3) Начиная с этого места, мы забываем о связи c_i с исходным элементом c . Будем рассматривать вообще множество M всех пар элементов c_1, c_2 : $c_1c_2 \neq 0$, $c_1^2 = c_2^2 = [c_1c_2] = 0$. Допустим, что выделяемое дополнительными тождествами $c_1u^2c_1c_2 = c_2u^2c_2c_1 = 0$ подмножество $S \subset M$ пусто. Тогда в $\mathfrak{L}$ существует элемент $c_{(2)}$. Выяснение особенностей доказательства этого утверждения далеко увело бы нас в сторону.

4) Итак, в $\mathfrak{L}$ существуют элементы c_1, c_2 , подчиняющиеся следующим требованиям:

$$c_1c_2 \neq 0, \quad c_1^2 = c_2^2 = [c_1c_2] = c_1u^2c_1c_2 = c_2u^2c_2c_1 = 0, \quad u \in \mathfrak{L}.$$

Можно показать, что $c_1^{(1)}c_2^{(1)} \neq 0$, $(c_1^{(1)})^2 = (c_2^{(1)})^2 = [c_1^{(1)}c_2^{(1)}] = c_1^{(1)}u^{\alpha}c_1^{(1)}c_2^{(1)} = 0$ ($\alpha = 0, 1, 2, 3$), где $c_1^{(1)} = [f_1c_1c_2]$; $c_2^{(1)} = [c_1h_1^3c_1]$, f_1, h_1 — некоторые фиксированные элементы из $\mathfrak{L}$. Наиболее трудным является здесь обоснование неравенства $c_1^{(1)}c_2^{(1)} \neq 0$.

Положив снова $c_1^{(2)} = [f_2c_1^{(1)}c_2^{(1)}]$, $c_2^{(2)} = [c_1^{(1)}h_2^3c_1^{(1)}]$, мы приходим к элементам, которые удовлетворяют тождествам $(c_1^{(2)})^2 = (c_2^{(2)})^2 = [c_1^{(2)}c_2^{(2)}] = c_1^{(2)}u^{\alpha}c_1^{(2)}c_2^{(2)} = c_2^{(2)}u^{\alpha}c_1^{(2)}c_2^{(2)} = 0$ ($\alpha = 2, 3$) и условию $c_1^{(2)}c_2^{(2)} \neq 0$.

После конечного числа однотипных преобразований у нас получатся элементы (обозначим их снова через c_1, c_2), свойства которых:

$$c_1c_2 \neq 0, \quad c_1^2 = c_2^2 = [c_1c_2] = c_1u^{\alpha}c_1c_2 = c_2u^{\alpha}c_2c_1 = 0, \quad \alpha \geq 0,$$

подсказывают путь их применения.

5) Рассмотрим в $\mathfrak{L}$ главный идеал $\mathfrak{N} = \{c_0\}$, $c_0 = [ae^2] \neq 0$, $e = c_1 + c_2$, где c_1 и c_2 взяты из п. 4).

Непосредственной проверкой убеждаемся в том, что $c_0h^2c_0g^2c_0 = 0$ для всех $h, g \in \mathfrak{N}$.

Из п. 1) следует существование в $\mathfrak{N}$ элемента $\tilde{c}_{(2)}$, а также (как это видно из приведенных выше замечаний о результатах работы ⁽⁶⁾) и элемента $\tilde{c}_{(3)}$, если $p > 7$. В любом случае мы получим элемент $\tilde{c} \in \mathfrak{N}$, удовлетворяющий соотношениям $\tilde{c}h^{\alpha}\tilde{c} = 0$, $0 \leq \alpha \leq 5$, $h \in \mathfrak{N}$, т. е. $[g\tilde{c}h^{\alpha}\tilde{c}] = 0$ для любого $g \in \mathfrak{N}$.

Как легко видеть, $c_0^2 = [ae^2]^2 = 0$ в $\mathfrak{L}$, а $\tilde{c}$ получился из c_0 в результате применения таких несложных операций, что свойство быть элементом второго порядка им не утрачивается. Сравнительно просто показывается,

что в $\mathfrak{L}$ выполнены соотношения

$$(\tilde{c}_0)^2 = \tilde{c}_0 h_1 h_2 \tilde{c}_0 = 0, \quad h_1, h_2, \tilde{c}_0 \in \mathfrak{M},$$

где $\tilde{c}_0$ есть либо исходный элемент $\tilde{c}$, либо одночлен $[\omega \tilde{c} h^2 \tilde{c}] \neq 0$, $\omega \in \mathfrak{L}$.

Полагая, в частности, $h_1 = [\tilde{c}_0 u^3]$, $h_2 = [\tilde{c}_0 v^3]$, мы приходим к тождеству $[\tilde{c}_0 u^3 \tilde{c}_0][\tilde{c}_0 v^3 \tilde{c}_0] = 0$, которое, согласно пунктам 1) и 2), можно считать завершением доказательства теоремы 2.

Сформулируем теперь предложение, являющееся главной целью нашего исследования.

Основная теорема. Произвольное кольцо Ли $\mathfrak{L}$, удовлетворяющее n -му условию Энгеля и имеющее характеристику $p \geq n$ (или $p = 0$), локально нильпотентно.

Доказательство основной части утверждения, когда $p > n$, вытекает из предыдущих замечаний и двух теорем, а равенство $p = n$ можно добавить, исходя из самых простых соображений.

Автор выражает глубокую благодарность И. Р. Шафаревичу за большой труд, связанный с просмотром рукописи работы и некоторых деталей доказательства.

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступило
3 III 1958

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ А. Г. Курош, Теория групп, М., 1953. ² А. И. Кострикин, Изв. АН СССР, сер. матем., 19, 233 (1955). ³ А. И. Кострикин, ДАН, 108, № 4 (1956). ⁴ А. И. Кострикин, Изв. АН СССР, сер. матем., 21, 515 (1957). ⁵ G. Higman, Proc. Cambr. Phil. Soc., 52, № 3 (1956). ⁶ А. И. Кострикин, ДАН, 118, № 6 (1958).

А. Ф. ЛАВРИК

СЛОЖЕНИЕ ПРОСТОГО ЧИСЛА С ПРОСТОЙ СТЕПЕНЬЮ ЗАДАННОГО ПРОСТОГО

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 19 XII 1957)

§ 1. В настоящей работе рассматриваются некоторые аддитивные задачи бинарного типа с простыми числами. В частности, решается вопрос о числе чисел n , не превосходящих заданной границы, для которых уравнение

$$n = p_1 + p_2^{p_2} \quad (1)$$

разрешимо в простых числах p_1, p_2, p_3 , где p_2 фиксированное.

Теорема 1. «Почти» все числа последовательности $p_1 + p_2^{p_2}$, где p_1, p_2 независимо друг от друга пробегают простые числа и p_2 — фиксированное простое, являются различными.

Иными словами, количество чисел, представимых в виде (1) более чем одним способом, имеет меньший порядок роста по сравнению с количеством чисел, которые представимы формой (1), но только одним способом.

Более точный факт доставляет следующая теорема.

Теорема 2. Пусть $Q(p_2, N)$ — число всех чисел $n \leq 2N$, представимых в виде (1) с $p_1 \leq N$, $p_2^{p_2} \leq N$; $F(p_2, N)$ — число тех из них, которые представимы только одним способом. Символ $\sim$ — знак асимптотического равенства.

Тогда имеем:

$$Q_1^+(p_2, N) = \frac{N}{\ln p_2 \cdot \ln \ln N} + O\left(\frac{N \ln \ln \ln N}{\ln p_2 \cdot \ln^2 \ln N}\right),$$

$$F(p_2, N) \sim Q(p_2, N). \quad (2)$$

Заметим здесь, что последовательность $p_1 + p_2^{p_2}$ существенно отличается от последовательности $p_1 + p_2^m$, $m = 1, 2, \dots$, изучавшейся в работах (1, 3, 4) и для этой последней, вообще говоря, не имеют места теоремы, аналогичные теоремам 1 и 2.

§ 2. Наметим путь доказательства теоремы 2. Обозначая через $R(n, p_2)$ число решений уравнения (1), оценим величины $Q(p_2, N)$ и $F(p_2, N)$ снизу. Имеем

$$Q(p_2, N) \geq F(p_2, N) = \sum_{n \leq 2N} R(n, p_2) - \sum_{\substack{n \leq 2N \\ R(n, p_2) \geq 2}} R(n, p_2) \geq$$

$$\geq \sum_{n \leq 2N} R(n, p_2) - \sum_{n \leq 2N} R(n, p_2) \{R(n, p_2) - 1\}. \quad (3)$$

Положим $S(n)$ равным числу решений уравнения $n = p_i - p_j$ в простых числах p_i, p_j с условием $p_i \leq N$, $p_j \leq N$ и воспользуемся тождеством (2) работы Н. П. Романова (1). Это тождество в данном случае может быть

записано в виде

$$\sum_{n \leq 2N} R^2(n, p_2) = \sum_{n \leq 2N} R(n, p_2) + 2 \sum_{1 < n = p_2^{q_1} - p_2^{q_2} \leq N} S(n), \quad (4)$$

где q_1, q_2 пробегает простые числа.

Из (3) и (4) теперь следует

$$Q(p_2, N) \geq F(p_2, N) \geq \sum_{n \leq 2N} R(n, p_2) - 2 \sum_{1 < n = p_2^{q_1} - p_2^{q_2} \leq N} S(n). \quad (5)$$

Пусть в дальнейшем $c, c_1, c_2, \dots$ обозначают некоторые абсолютные константы.

Обратимся к оценкам сумм, входящих в неравенство (5). Согласно известной теореме Вигго Бруна — Шнирельмана (2)

$$S(n) < c \frac{N}{\ln^2 N} f(n), \quad f(n) = \prod_{p|n} \left(1 + \frac{1}{p}\right), \quad (6)$$

где p пробегает простые делители n .

На основании оценки (6) получаем

$$\begin{aligned} \sum_{1 < n = p_2^{q_1} - p_2^{q_2} \leq N} S(n) &< c \frac{N}{\ln^2 N} \sum_{q_2 < q_1 \leq \ln N / \ln p_2} f(p_2^{q_1} - p_2^{q_2}) = \\ &= c \frac{N}{\ln^2 N} f(p_2) \sum_{q_2 < q_1 \leq \ln N / \ln p_2} f(p_2^{q_1 - q_2} - 1) \leq \frac{3}{2} c \frac{N}{\ln^2 N} \sum_{q_2 < q_1 \leq \ln N / \ln p_2} f(p_2^{q_1 - q_2} - 1). \end{aligned} \quad (7)$$

Положим, далее, $h = q_1 - q_2$, где $q_2 < q_1$ — простые числа и

$$q_2, q_1 \leq \ln N / \ln p_2. \quad (8)$$

Тогда для всякого h с условием $1 \leq h \leq \ln N / \ln p_2$, снова применяя результат «решета» Вигго Бруна — оценку (6), найдем, что число решений уравнения (8) не превосходит

$$c \frac{\ln N}{\ln p_2 \cdot \ln^2 \frac{\ln N}{\ln p_2}} \left(\max_{h \leq \ln N / \ln p_2} \prod_{p|h} \left(1 + \frac{1}{p}\right) \right) < c_2 \frac{\ln N \cdot \ln \ln \ln N}{\ln p_2 \cdot \ln^2 \frac{\ln N}{\ln p_2}}.$$

Поэтому из (7) получаем

$$\sum_{1 < n = p_2^{q_1} - p_2^{q_2} \leq N} S(n) < c_0 \frac{N \ln \ln \ln N}{\ln N \cdot \ln p_2 \cdot \ln^2 \frac{\ln N}{\ln p_2}} \sum_{1 \leq h \leq \ln N / \ln p_2} f(p_2^h - 1). \quad (9)$$

Для оценки последней суммы введем обозначения: $\delta(k, p_2)$ — показатель, которому число p_2 принадлежит по модулю k , $\mu(k)$ — функция Мёбиуса, $\varphi(k)$ — функция Эйлера, $l = \delta(d, p_2)$.

Получаем теперь

$$\sum_{1 \leq h \leq \ln N / \ln p_2} f(p_2^h - 1) < c_4 \sum_{1 \leq k \leq N} \frac{\mu^2(k)}{k} \sum_{\substack{1 \leq h \leq \ln N / \ln p_2 \\ p_2^h \equiv 1 \pmod{k}}} 1 < c_5 \frac{\ln N}{\ln p_2} \sum_{1 \leq k \leq N} \frac{\mu^2(k)}{k \delta(k, p_2)}.$$

Ряд справа, как доказал Н. П. Романов (1), сходится. Более того, если положить

$$\tau(l, p_2) = \sum_{\substack{l \equiv 1 \pmod{d} \\ l \mid \varphi(d)}} \frac{\mu^2(d)}{d},$$

то имеют место следующие неравенства:

$$\sum_{1 \leq k \leq N} \frac{\mu^2(k)}{k \delta(k, p_2)} < c_6 \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\sigma(l, p_2)}{l} < c_7 \ln^2 \ln 2p_2.$$

Доказательство последнего из этих неравенств достаточно сложно и может быть получено методом работы (1).

Таким образом находим:

$$\sum_{1 \leq h \leq \ln N / \ln p_2} f(p_2^h - 1) < c_8 \frac{\ln N \cdot \ln^2 \ln 2p_2}{\ln p_2}.$$

Соединяя эту оценку с неравенством (9), получим

$$\sum_{1 < n = p_2^{q_1} - p_2^{q_2} \leq N} S(n) < c_9 \frac{N \ln \ln \ln N \cdot \ln^2 \ln 2p_2}{\ln^2 \frac{\ln N}{\ln p_2} \cdot \ln^2 p_2}. \quad (10)$$

Для оценки первой суммы из (5) введем обозначения: $\pi(x)$ — число простых чисел $\leq x$, $P(x)$ — число чисел $p_2^{p_3} \leq x$.

Применяя закон простых чисел, будем иметь

$$\sum_{n \leq 2N} R(n, p_2) = \pi(N) P(N) = \frac{N}{\ln p_2 \cdot \ln \frac{\ln N}{\ln p_2}} + O\left(\frac{N}{\ln p_2 \cdot \ln N}\right). \quad (11)$$

Собирая оценки (5), (10) и (11), получим

$$F(p_2, N) \geq \frac{N}{\ln p_2 \cdot \ln \frac{\ln N}{\ln p_2}} + O\left(\frac{N \ln \ln \ln N}{\ln p_2 \cdot \ln^2 \frac{\ln N}{\ln p_2}}\right). \quad (12)$$

С другой стороны, очевидно, имеем

$$F(p_2, N) \leq Q(p_2, N) \leq \sum_{n \leq 2N} R(n, p_2), \quad (13)$$

так что из (10) — (13) получаем окончательно формулу (2). Тем самым доказана теорема 2.

§ 3. Сходные соображения позволяют получить так же нетривиальное обобщение результатов работы (4).

Теорема 3. Пусть $J_k(a, N)$ — число чисел $n \leq 2N$, представимых в виде

$$n = p + a^m, \quad (14)$$

где p — простое; $a \geq 2$ — данное целое; $m = 1^k, 2^k, \dots$; $k \geq 2$ — произвольное фиксированное целое; $p \leq N$; $a^m \leq N$. $G_k(a, N)$ — количество тех чисел, которые представимы формой (14) только одним способом.

Тогда имеем:

$$J_k(a, N) \sim G_k(a, N),$$

$$J_k(a, N) = \frac{N}{(\ln N)^{1-1/k} \ln^{1/k} a} + O\left(\frac{N}{\ln^{1-\varepsilon} N \cdot \ln^{1/k} a}\right),$$

где $\varepsilon > 0$ — сколь угодно малая постоянная.

Ташкентский государственный педагогический институт
им. Низами

Поступило
16 XII 1957

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ Н. П. Романов, Усп. матем. наук, в. 7, 47 (1940). ² Л. Г. Шнирельман, Усп. матем. наук, в. 7, 7 (1940). ³ E. Landau, Acta Arithmet., 1, 43 (1935). ⁴ А. Ф. Лаврик, ДАН, 115, № 3, 445 (1957).

В. Б. ЛИДСКИЙ

ТЕОРЕМЫ О ПОЛНОТЕ СИСТЕМЫ СОБСТВЕННЫХ
И ПРИСОЕДИНЕННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ОПЕРАТОРОВ
С ДИСКРЕТНЫМ СПЕКТРОМ

(Представлено академиком М. В. Келдышем 30 XII 1957)

Пусть T — вполне непрерывный оператор, действующий в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$. Оператор T называется оператором типа Гильберта — Шмидта (типа Г. — Ш.), если

$$\sum_s (T\varphi_s, T\varphi_s) < \infty, \quad (1)$$

где φ_s ($s = 1, 2, \dots$) — ортонормированный базис в $\mathfrak{H}$. В случае интегрального оператора $Kf = \int_0^1 k(x, t) f(t) dt$, который действует в $\mathcal{L}_2(0, 1)$ (в гильбертовом пространстве функций, обладающих интегрируемым квадратом по Лебегу на отрезке $(0, 1)$), условие (1) эквивалентно условию

$$\int_0^1 \int_0^1 |k(x, t)|^2 dx dt < \infty. \quad (2)$$

Теорема 1. Пусть оператор типа Г. — Ш., действующий в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, записан в виде

$$T = A + iB, \quad (3)$$

и пусть самосопряженные операторы A и B являются знакоопределенными (квадратичные формы (Af, f) и (Bf, f) сохраняют знак). Тогда собственные и присоединенные элементы оператора T , относящиеся к ненулевым точкам спектра, образуют систему, полную в области значений оператора T . Если к указанной системе добавить базис в подпространстве решений уравнения $Tf = 0$, то получится система, полная в $\mathfrak{H}$.

Для доказательства обозначим через Q_1 замкнутое подпространство, натянутое на все собственные и присоединенные элементы оператора T , соответствующие ненулевым точкам спектра. Пусть Q_2 — ортогональное дополнение к Q_1 . Легко показать, что сопряженный к T оператор T^* инвариантен на Q_2 . Обозначим через $T_{Q_2}^*$ оператор, индуцируемый оператором T^* на Q_2 . Можно показать, что нуль есть единственная точка спектра оператора $T_{Q_2}^*$ (ср. (3)).

После этих замечаний отобразим Q_2 с сохранением скалярного произведения на $\mathcal{L}_2(0, 1)$ (или на некоторое его подпространство, если Q_2 конечномерно) и рассмотрим в $\mathcal{L}_2(0, 1)$ интегральный оператор K , унитарно эквивалентный оператору $T_{Q_2}^*$. Такой оператор легко построить. Пусть

$D^*(\lambda)$ — детерминант Фредгольма интегрального оператора K ((¹), стр. 196):

$$D^*(\lambda) = 1 + \sum_{n=2}^\infty \frac{(-\lambda)^n}{n!} \delta_n, \tag{4}$$

где

$$\delta_n = \int_0^1 \dots \int_0^1 \begin{vmatrix} 0 & k(x_1, x_2) & \dots & k(x_1, x_n) \\ k(x_2, x_1) & 0 & \dots & k(x_2, x_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k(x_n, x_1) & \dots & \dots & 0 \end{vmatrix} dx_1 \dots dx_n. \tag{5}$$

Как доказал Карлеман ((¹), стр. 217), $D^*(\lambda)$ есть целая функция, для которой справедливо представление

$$D^*(\lambda) = 1 \cdot \prod_{s=1}^\infty (1 - \lambda \lambda_s) e^{\lambda \lambda_s}. \tag{6}$$

Через λ_s здесь обозначены собственные значения оператора. Так как в нашем случае у оператора K отсутствуют собственные значения, отличные от нуля, то на основании (6) мы заключаем, что $D^*(\lambda) \equiv 1$.

Из формул (4) и (5) тогда, в частности, следует, что

$$\delta_2 = - \int_0^1 \int_0^1 k(x_1, x_2) k(x_2, x_1) dx_1 dx_2 = 0. \tag{7}$$

С другой стороны, $-\text{Im } \delta_2$ есть след мнимой части* оператора K^2 . Таким образом, $\text{Sp}(\text{Im } K^2) = 0$. Отсюда, в силу унитарной эквивалентности, мы заключаем, что и

$$\text{Sp}(\text{Im } T_{q_2}^{*2}) = 0. \tag{8}$$

Представим оператор $T_{q_2}^*$ в виде $T_{q_2}^* = A_{q_2} - iB_{q_2}$, где A_{q_2} и B_{q_2} — самосопряженные операторы, определенные в Q_2 , и вычислим левую часть (8) в ортонормированном базисе из собственных векторов оператора B_{q_2} . После несложных преобразований получим

$$\text{Sp}(\text{Im } T_{q_2}^{*2}) = - \sum_s 2\mu_s (A_{q_2} \psi_s, \psi_s) = 0, \tag{9}$$

где μ_s ($s = 1, 2, \dots$) — собственные значения B_{q_2} .

Операторы A_{q_2} и B_{q_2} являются знакоопределенными вместе с A и B в (3). Поэтому из равенства (9) заключаем, что

$$\mu_s (A_{q_2} \psi_s, \psi_s) = 0 \tag{10}$$

для всех $s = 1, 2, \dots$. Покажем, что все собственные значения оператора B_{q_2} равны нулю.

Допустим противное. Пусть $\mu_s^0 \neq 0$. Тогда из (10) следует, что $(A_{q_2} \psi_s^0, \psi_s^0) = 0$, где ψ_s^0 — собственный элемент B_{q_2} , соответствующий μ_s^0 . Ввиду знакоопределенности A_{q_2} это означает, что $A_{q_2} \psi_s^0 = 0$. Применив далее к ψ_s^0 оператор $T_{q_2}^*$, будем иметь

$$T_{q_2}^* \psi_s^0 = A_{q_2} \psi_s^0 - iB_{q_2} \psi_s^0 = -i\mu_s^0 \psi_s^0. \tag{11}$$

* Под мнимой частью оператора C понимается оператор $\frac{1}{2i} (C - C^*)$, обозначаемый $\text{Im } C$.

Равенство (11) содержит противоречие, ибо, по условию, $T_{q_2}^*$ имеет лишь нулевую точку спектра, а $\mu_s^0 \neq 0$. Таким образом, все $\mu_s = 0$ ($s = 1, 2, \dots$). Следовательно, $B_{q_2} = 0$. Аналогично можно показать, что $A_{q_2} = 0$. В результате оператор $T_{q_2}^* = 0$, а это уже означает полноту в области значений оператора T . Действительно, если $g \in Q_2$, то $(Th, g) = (h, T^*g) = (h, T_{q_2}^*g) = 0$; следовательно, при любом $h \in \mathfrak{H}$ элемент Th ортогонален к Q_2 и, значит, $Th \in Q_1$.

Справедливость замечания в конце теоремы следует из того, что оператор T , так же как и T^* , переводит Q_2 — ортогональное дополнение к Q_1 — в нуль*. Теорема доказана.

Следует отметить, что можно привести примеры, доказывающие существование условий знакоопределенности, выдвинутых в теореме 1.

Из теоремы 1 может быть получена следующая теорема:

Теорема 2. Пусть операторы L_1 и L_2 симметричны на некотором плотном в $\mathfrak{H}$ многообразии $\mathfrak{D}$, и пусть при некотором λ многообразие $(L_1 + iL_2 - \lambda E)\mathfrak{D}$ плотно в $\mathfrak{H}$.

Пусть, далее, выполняется одно из двух условий:

а) Операторы L_1 и L_2 полуограничены на $\mathfrak{D}$ (для определенности оба снизу) и, кроме того, один из трех самосопряженных операторов $\tilde{L}_1, \tilde{L}_2$ или $\tilde{L}_1 + L_2$ обладает резольвентой типа Γ . — III**.

б) Для всех $f \in \mathfrak{D}$

$$(L_1 f, f) - |(L_2 f, f)| \geq -\gamma^2(f, f)$$

и, кроме того, оператор $\tilde{L}_1$ обладает резольвентой типа Γ . — III.

Тогда несамосопряженный оператор $L = L_1 + iL_2$ допускает замыкание $\tilde{L}$; оператор $\tilde{L}$ обладает резольвентой типа Γ . — III., и система его собственных и присоединенных элементов полна в $\mathfrak{H}$.

Теоремы 1 и 2 могут быть использованы при исследовании различных интегральных и дифференциальных операторов. Приведем два примера.

Пример 1 (ср. (2-4)). Рассмотрим сильно эллиптический оператор (5)

$$Lu = \sum_{[i, j]} \frac{\partial^m}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_m}} C^{[i, j]}(x) \frac{\partial^m u}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_m}} + \\ + \sum_{[i, j]} \frac{\partial^m}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_m}} K^{[i, j]}(x) \frac{\partial^m u}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_m}} + Pu,$$

который действует на многообразии $\mathfrak{D}$ вектор-функций $u(x)$, удовлетворяющих на границе Γ некоторой конечной области G n -мерного евклидова пространства краевым условиям

$$u(x) \Big|_{\Gamma} = \frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{\Gamma} = \dots = \frac{\partial^{m-1} u}{\partial \nu^{m-1}} \Big|_{\Gamma} = 0,$$

где ν — нормаль к Γ . Для краткости запишем оператор L в виде:

$$Lu = Cu + Ku + Pu,$$

где через C и K мы обозначили соответственно полуограниченный симметрический и кососимметрический операторы порядка $2m$, а через P — произвольный оператор порядка $< 2m$.

* Действительно, если $g \in Q_2$, то $T^*g = Ag - iBg = 0$, и, значит, ввиду знакоопределенности A и B : $Ag = 0$ и $Bg = 0$, откуда $Tg = 0$.

** Волной обозначено самосопряженное расширение соответствующего оператора.

Пусть $4m - n > 0$ и пусть для всех $u \in \mathfrak{D}$

$$(Cu, u) - |(Ku, u)| \geq -\gamma^2(u, u). \quad (12)$$

Тогда система собственных и присоединенных элементов оператора L полна в $\mathcal{L}_2(G)$. Если оператор iK полуограничен, то условие (12) можно отбросить.

Пример 2 (ср. (6-8)). Рассмотрим оператор

$$Ly = -y'' + (q(x) + ir(x))y, \quad (13)$$

определенный на некотором плотном в $\mathcal{L}_2(-\infty, +\infty)$ многообразии. Пусть функция $q(x)$ ограничена снизу, а $r(x)$ полуограничена (т. е. ограничена либо сверху, либо снизу). Тогда для полноты системы собственных и присоединенных элементов оператора L в $\mathcal{L}_2(-\infty, +\infty)$ достаточно, чтобы при некотором $\alpha > 2/3$

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{q(x) + |r(x)|}{|x|^\alpha} \geq C > 0.$$

Подчеркнем, что тем самым устанавливается полнота в случае операторов вида (13) и тогда, когда уходит в бесконечность «мнимый потенциал» $r(x)$ *.

Приношу благодарность чл.-корр. АН СССР И. М. Гельфанду и проф. М. А. Наймарку за внимание в настоящей работе.

Московский физико-технический
институт

Поступило
28 XII 1957

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ T. Carleman, Math. Zs., 9, 196 (1921). ² М. В. Келдыш, ДАН, 77, 11 (1951).
³ F. E. Browder, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 39, 433 (1953). ⁴ Б. М. Наймарк, ДАН, 112, 198 (1957). ⁵ М. И. Вишик, Матем. сборн., 29 (71), 3, 615 (1951). ⁶ М. А. Наймарк, ДАН, 98, 727 (1954). ⁷ J. Schwartz, Pacific J. Math., 4, 2, 415 (1954). ⁸ В. Б. Лидский, ДАН, 110, 172 (1956).

* Соответствующая задача была поставлена И. М. Гельфандом.

Б. М. МАКАРОВ

ОБ ИНДУКТИВНЫХ ПРЕДЕЛАХ НОРМИРОВАННЫХ ПРОСТРАНСТВ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 23 XII 1957)

В работах Себастьяна-и-Силва ⁽¹⁾ и Д. А. Райкова ⁽²⁾ рассматриваются индуктивные и проективные пределы нормированных пространств с вполне непрерывными вложениями. Настоящая заметка посвящена главным образом индуктивным и проективным пределам рефлексивных нормированных пространств. Ранее полученные ^(1,2) результаты в основном переносятся на рассматриваемый случай.

Определение 1. Пусть E_n — последовательность локально выпуклых пространств, причем E_n — линейное подмножество E_{n+1} и вложения (операция отождествления) E_n в E_{n+1} непрерывно. Индуктивным пределом последовательности пространств E_n называется их объединение $E = \bigcup_1^\infty E_n$, снабженное сильнейшей из локально выпуклых топологий, при которых все вложения E_n в E непрерывны.

Определение 2. Пусть E_n — индуктивный предел пространств E_n и пусть найдется последовательность абсолютно выпуклых * замкнутых окрестностей нуля V_n (V_n — окрестность нуля в E_n) такая, что при некоторых $\lambda_n > 0$ $\lambda_n V_n \subset V_{n+1}$, $n = 1, 2, \dots$. Будем говорить, что последовательность пространств E_n удовлетворяет условию (F_1) , если все V_n замкнуты в E , а V_1 не содержит ненулевых линейных подмножеств E , и соответственно, условию (F_2) , если всякая абсолютно выпуклая замкнутая окрестность нуля W_n в E_n , содержащаяся в V_n , замкнута в E_{n+1} .

Теоремы 1 и 2 доказываются в предположении, что выполнено одно из условий (F_1) или (F_2) .

Теорема 1. Пусть E — индуктивный предел отделимых пространств E_n . Тогда E отделимо, и всякое множество, ограниченное в E , содержится в некотором E_n .

Теорема 2. Пусть E — индуктивный предел последовательности нормированных пространств E_n . Тогда всякое множество, ограниченное в E , содержится и ограничено в некотором E_n .

Локально выпуклое пространство E называется борнологическим, если всякое выпуклое множество, поглощающее каждое ограниченное множество, есть окрестность нуля в E .

Теорема 3. Чтобы отделимое борнологическое пространство обладало метрическим сопряженным, необходимо и достаточно, чтобы оно было индуктивным пределом последовательности нормированных пространств, удовлетворяющей условию (F_1) .

* Подмножество A линейного множества L называется абсолютно выпуклым, если при любых $x, y \in A$ и $|\alpha| + |\beta| \leq 1$ $\alpha x + \beta y \in A$.

Так как индуктивный предел борнологических (в частности нормированных) пространств снова есть борнологическое пространство, то из теорем 1 и 3 получаем:

С л е д с т в и е. Если E — индуктивный предел последовательности нормированных пространств, удовлетворяющей условию (F_2) , то E — также индуктивный предел последовательности нормированных пространств, удовлетворяющей условию (F_1) .

С помощью результатов Гротендика ⁽³⁾ получаем, что всякое рефлексивное пространство с метрическим сопряженным есть индуктивный предел последовательности нормированных пространств, удовлетворяющих условию (F_1) .

О п р е д е л е н и е 3. Пусть E_n — последовательность локально выпуклых пространств и π_m^n для всех m и $n > m$ — непрерывные линейные отображения E_n в E_m такие, что $\pi_m^p = \pi_m^n \pi_n^p$ при $m < n < p$. Пусть E — совокупность последовательностей $x = \{x_n\}$, где каждое $x_n \in E_n$ и $x_m = \pi_m^n(x_n)$ для всех m и $n > m$, и π_n — линейное отображение (проекция) E в E_n ($\pi_n(x) = x_n$). Проективным пределом последовательности пространств E_n относительно отображений π_m^n называется пространство E , снабженное наиболее слабой топологией, при которой все проекции π_n непрерывны.

Будем называть индуктивные и проективные пределы рефлексивных нормированных пространств соответственно пространствами (J) и (P) .

Ясно, что в этом случае выполнены оба условия (F_1) и (F_2) .

Т е о р е м а 4. Пространства классов (J) и (P) рефлексивны, и сильные сопряженные к ним являются соответственно пространствами классов $P)$ и $J)$.

Условимся обозначать слабые топологии в локально выпуклом пространстве E и сопряженном пространстве E' соответственно через $\sigma(E, E')$ и $\sigma(E', E)$.

Т е о р е м а 5. Пусть E — индуктивный предел рефлексивных нормированных пространств E_n , $A \subset E$ и $A_n = A \cap E_n$ замкнуто в топологии $\sigma(E_n, E'_n)$. Тогда A замкнуто в E (в сильной топологии).

З а м е ч а н и е. Если A — выпуклое множество, то из замкнутости A_n в E_n (в сильной топологии) следует замкнутость A в E в топологии $\sigma(E, E')$.

Последнее замечание несколько усиливает известный результат ⁽⁶⁾ (относящийся, однако, к более широкому классу пространств) о том, что в пространстве F' , сопряженном к полному локально выпуклому метрическому пространству F , для замкнутости выпуклого множества $A \subset F'$ в топологии $\rho(F', F)$ достаточно, чтобы все пересечения A с абсолютно выпуклыми слабо замкнутыми ограниченными множествами были слабо замкнуты.

Для фактор- и подпространств классов (P) и (J) в значительной степени сохраняется двойственность, установленная Д. А. Райковым ⁽²⁾ в случае индуктивных и проективных пределов с вполне непрерывными вложениями.

Т е о р е м а 6. Пусть F — пространство класса (P) и M — замкнутое подпространство F . Фактор-пространство F/M снова есть пространство класса (P) .

Т е о р е м а 7. Пусть E — пространство класса (J) и N — замкнутое подпространство E . Фактор-пространство E/N снова есть пространство класса (J) .

Т е о р е м а 8. Замкнутое подпространство M пространства F класса (P) — снова пространство класса (P) , изоморфное сильному сопряженному к пространству F'/M' .

Будем говорить, что линейное отображение одного локально выпуклого пространства в другое слабо вполне непрерывно, если замыкание образа некоторой окрестности слабо бикомпактно.

Пусть (J_1) — класс индуктивных пределов нормированных пространств со слабо непрерывными вложениями и (J'_1) — класс сопряженных пространств.

Пространства класса (J_1) рефлексивны, и для пространств (J'_1) и (J_1) верны теоремы 2 и 5—8.

Легко доказать, что индуктивный предел произвольных отделимых локально выпуклых пространств со слабо вполне непрерывными вложениями есть пространство (J_1) .

Автор выражает глубокую благодарность Д. А. Райкову и Г. П. Акилову за замечания и советы.

Поступило
9 XII 1957

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ J. Sebastião e Silva, Rend. Mat. Appl., 14, 388 (1955) (русск. пер. Математика, 1, 60 1957). ² Д. А. Райков, ДАН, 113, № 5, 984 (1957). ³ A. G. O. thendieck, Summa Brasil. Mat., 3, 57 (1954). ⁴ N. Bourbaki, Eléments de mathématique, livre V, ch. III—V, Paris, 1955. ⁵ N. Bourbaki, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 2, 5 (1951). ⁶ J. Dieudonné, L. Schwartz, ibid., 1, 61 (1950). ⁷ В. Птак, Чехословацк. матем. журн., 3, № 4, 301 (1954).

Академик А. И. МАЛЬЦЕВ

ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ СООТНОШЕНИЯ В КАТЕГОРИЯХ

Непосредственной целью настоящей заметки является перенесение теории определяющих соотношений в классы моделей. Однако основные структурные понятия теории моделей — подмодели, прямые произведения и некоторые другие — могут быть выражены через понятие гомоморфизма в смысле ⁽¹⁾ и притом тем же способом, что и в общей теории категорий. Поэтому ниже определяющие соотношения вводятся и изучаются сразу в общих категориях. В конце указывается истолкование их для категорий моделей.

1. Согласно Эйленбергу и Маклейну ⁽²⁾, категорией K называется класс элементов, в котором определены частичная бинарная операция умножения и предикат быть нейтральным элементом, подчиняющиеся аксиомам: 1) если ab , bc определены, то определены и равны $a \cdot bc$ и $ab \cdot c$; 2) если определено $a \cdot bc$ или $ab \cdot c$, то определено ab ; 3) если e нейтральный элемент, то $e^2 = e$, и из определенности ea или ae следует соответственно $ea = a$ или $ae = a$; 4) для каждого $a \in K$ существуют нейтральные элементы e, e' такие, что $ea = ae' = a$. Нейтральные элементы K называются также объектами категории K . Если для объектов e, e' имеем $ea = ae' = a$, то a называется гомоморфизмом e в e' . Гомоморфизм a называется изоморфизмом, если существует в K гомоморфизм b , для которого ab и ba суть нейтральные элементы K . В этом случае объекты ab, ba называются изоморфными.

Согласно Маклейну ⁽³⁾ объект $\mathcal{U}$ категории K называется прямой композицией системы объектов $\mathcal{U}_\alpha$ ($\alpha \in \Gamma$), если существуют такие гомоморфизмы π_α объекта $\mathcal{U}$ в $\mathcal{U}_\alpha$, что для любой системы гомоморфизмов σ_α произвольного объекта $\mathcal{V}$ в $\mathcal{U}_\alpha$ найдется и только один гомоморфизм $\xi: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{U}$, удовлетворяющий соотношениям $\sigma_\alpha = \xi \pi_\alpha$ ($\alpha \in \Gamma$). Двойственно этому объект $\mathcal{U} \in K$ называется K -свободной композицией системы $\mathcal{U}_\alpha$ ($\alpha \in K$), если существуют гомоморфизмы $\pi_\alpha: \mathcal{U}_\alpha \rightarrow \mathcal{U}$ такие, что для любой системы гомоморфизмов σ_α объектов $\mathcal{U}_\alpha$ в произвольный K -объект $\mathcal{V}$ найдется и только один гомоморфизм $\xi: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$, удовлетворяющий соотношениям $\sigma_\alpha = \pi_\alpha \xi$ ($\alpha \in \Gamma$). Прямые и свободные композиции могут не существовать, но если существуют, то определяются однозначно с точностью до изоморфизма.

Далее подкатегорией L категории K будет называться подкласс класса объектов K вместе со всеми гомоморфизмами из K , принадлежащими всевозможным парам L -объектов. Смысл понятий изоморфизма, прямой и свободной композиции вообще изменится при переходе от K к L . Однако изоморфизм и прямая композиция будут далее употребляться в смысле основной категории, а свободная композиция будет рассматриваться в различных подкатегориях в смысле этих подкатегорий.

2. Далее нам будут нужны категории более частного вида, которые будут называться категориями структуризованных множеств или просто категориями структур. Аналогичные понятия рассмотрены Исбелом ⁽⁴⁾ и самим Маклейном ⁽³⁾. В основу кладется класс K объектов, называемых структурами (структуризованными множествами, пространствами). С каж-

дой структурой $\mathfrak{A}$ предполагается сопоставленным однозначно определенное множество $\mu(\mathfrak{A})$ — основное множество структуры $\mathfrak{A}$. Сверх этого задается некоторая система H однозначных отображений основных множеств структур в основные множества структур и требуется, чтобы тождественное отображение каждой структур на себя входило в H и чтобы для отображения α структуры $\mathfrak{A}$ в структуру $\mathfrak{B}$ и отображения β структуры $\mathfrak{B}$ в структуру $\mathfrak{C}$ из $\alpha, \beta \in H$ следовало $\alpha\beta \in H$. Отображения из H называются гомоморфизмами. Мы будем считать тождественными структуры с общим основным множеством, тождественное отображение которого на себя есть гомоморфизм первой структур на вторую и второй на первую. Мы будем считать также, что на произвольном множестве A определена структура, если задано взаимно-однозначное отображение A на основное множество некоторой структуры $\mathfrak{A}$ и сказано, что это отображение есть изоморфизм. Класс структур абстрактный, если он вместе с каждой структурой содержит и все ей изоморфные. Ниже рассматриваются лишь абстрактные классы структур. Совокупность H всех гомоморфизмов K -структур является категорией в изложенном смысле. Объекты этой категории будут отождествляться со структурами, тождественными отображениями которых они являются.

В категории структур K структура $\mathfrak{B}$ называется подструктурой структуры $\mathfrak{A}$, если: 1) $\mu(\mathfrak{B}) \subseteq \mu(\mathfrak{A})$; 2) любой гомоморфизм $\mathfrak{A}$ в произвольную структуру $\mathfrak{C}$, рассматриваемый для $\mathfrak{B}$, есть гомоморфизм $\mathfrak{B}$ в $\mathfrak{C}$; 3) любое отображение структуры $\mathfrak{C}$ в $\mathfrak{B}$, являющееся гомоморфизмом $\mathfrak{C}$ в $\mathfrak{A}$, есть гомоморфизм $\mathfrak{C}$ в $\mathfrak{B}$. Подструктура $\mathfrak{B}$ однозначно определяется $\mu(\mathfrak{B})$ и $\mathfrak{A}$. Структура $\mathfrak{B}$ будет называться сильной подструктурой в $\mathfrak{A}$, если, кроме условий 1—3, имеем: 4) каждый гомоморфизм в $\mathfrak{B}$ есть гомоморфизм в $\mathfrak{A}$.

Прямая композиция $\mathfrak{A}$ системы структур $\mathfrak{A}_\alpha$ будет называться разделяющейся, если из « $\alpha\pi_\alpha = b\pi_\alpha$ для всех канонических гомоморфизмов π_α ($\alpha \in \Gamma$)» следует $a = b$ ($a, b \in \mathfrak{A}$). Эта композиция будет называться полной, если для любых $a_\alpha \in \mathfrak{A}_\alpha$ в $\mathfrak{A}$ найдется элемент a такой, что $a_\alpha = a\pi_\alpha$ ($\alpha \in \Gamma$). Прямая композиция называется прямым произведением, если она разделяющаяся и полная. В этом случае элементы прямой композиции будут отождествляться с элементами декартова произведения основных множеств сомножителей.

Структуру $\mathfrak{A}$ категории K назовем единичной, если $\mathfrak{A}$ одноэлементна и отображение любой K -структуры в $\mathfrak{A}$ гомоморфизм. $\mathfrak{A}$ будет называться нуль-структурой, если $\mathfrak{A}$ одноэлементна и любое отображение $\mathfrak{A}$ в произвольную K -структуру есть гомоморфизм. Легко видеть, что если категория K содержит нуль-структуру, то всякая прямая композиция будет полной и разделяющейся. Также легко доказывается:

Теорема 1. Пусть в категории K все подструктуры сильные и прямые композиции разделяющиеся и пусть в каждой K -структуре $\mathfrak{A}_\alpha$ ($\alpha \in \Gamma$) выделена K -подструктура $\mathfrak{B}_\alpha$ и прямые композиции $\mathfrak{A} = \Pi \mathfrak{A}_\alpha$, $\mathfrak{B} = \Pi \mathfrak{B}_\alpha$ существуют. Тогда $\mathfrak{B}$ есть подструктура $\mathfrak{A}$.

Категорию L условимся называть мультипликативно замкнутой, если в ней существуют прямые композиции любых систем L -структур.

Теорема 2. Для того, чтобы в мультипликативно замкнутой, содержащей единичную структуру категории K с сильными подструктурами и разделяющимися прямыми композициями все канонические гомоморфизмы K -структур в их K -свободные композиции были изоморфизмами на соответствующие подструктуры, необходимо и достаточно, чтобы каждая K -структура была изоморфно вложима в K -структуру с единичной подструктурой.

При рассмотрении категорий структур ниже всегда будет предполагаться выполненной следующая аксиома определенности: совокупность всех K -структур, определенных на любом фиксированном множестве,

можно рассматривать как множество определенной мощности. Категорию структур K будем называть ограниченной, если для каждого кардинального числа m найдется такое кардинальное $n + \kappa(m)$, что в каждой K -структуре любое множество элементов мощности $\leq m$ содержится в подходящей K -подструктуре мощности $\leq n$.

3. Пусть K_0 -какая-либо (общая) категория K , L ее подкатегории и $K \supseteq L$. Репликой K -объекта $\mathfrak{A}$ в категории L (L -репликой $\mathfrak{A}$) будет называться L -объект $\mathfrak{B}$, для которого существует такой гомоморфизм $\pi: \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$, что для любого гомоморфизма τ объекта $\mathfrak{A}$ в произвольный L -объект $\mathfrak{C}$ найдется один и только один гомоморфизм $\xi: \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{C}$, удовлетворяющий соотношению $\tau = \xi\pi$. Гомоморфизмы π, ξ будут называться каноническими. Легко видеть, что если реплика существует, то она определяется с точностью до изоморфизма объектом $\mathfrak{A}$ и, в частности, L -реплика L -объекта всегда совпадает с самим объектом.

Теорема 3. Пусть $K \subset L \subset M$ — подкатегории и $\mathfrak{A}^L, \mathfrak{A}^M$ суть реплики K -объекта $\mathfrak{A}$ в L и M . Тогда $\mathfrak{A}^M$ есть M -реплика объекта $\mathfrak{A}^L$. Если $\mathfrak{A}$ есть L -свободная композиция K -объектов $\mathfrak{A}_\alpha (\alpha \in \Gamma)$ и L -реплики $\mathfrak{A}^L, \mathfrak{A}_\alpha^L$ этих объектов существуют, то $\mathfrak{A}^L$ есть L -свободная композиция системы $\mathfrak{A}_\alpha^L$.

Заметим, что если рассматриваются категории структур и $\mathfrak{B}$ есть L -реплика структуры $\mathfrak{A}$ с каноническим гомоморфизмом π , то в $\mathfrak{B}$ нет L -подструктуры, отличной от $\mathfrak{B}$ и содержащей $\mathfrak{A}^\pi$, т. е. $\mathfrak{B}$ порождается элементами $\mathfrak{A}^\pi$.

Совокупность элементов S некоторой структуры $\mathfrak{A}$ категории K будем называть K -плотной в $\mathfrak{A}$, если для любых гомоморфизмов η, σ структуры $\mathfrak{A}$ в произвольную K -структуру из « $a\eta = a\sigma$ для всех $a \in S$ » следует $\eta = \sigma$.

Легко видеть, что если π_α — канонические гомоморфизмы свободной композиции $\mathfrak{A}$ структур $\mathfrak{A}_\alpha (\alpha \in \Gamma)$, то совокупность $\cup \mathfrak{A}_\alpha^{\pi_\alpha}$ будет K -плотной в $\mathfrak{A}$. Далее, если в $\mathfrak{A}$ есть K -подструктура $\mathfrak{B}$, содержащая множество $\cup \mathfrak{A}_\alpha^{\pi_\beta} (\beta \in \Gamma_1 \subset \Gamma)$ в качестве своей плотной системы, то $\mathfrak{B}$ будет K -свободной композицией структур $\mathfrak{A}_\beta (\beta \in \Gamma_1)$. Из определения также следует, что канонический образ структуры в ее реплике является плотным множеством в последней.

Подкатегорию L в категории K назовем R -полной, если каждый K -объект имеет в L реплику. Из теоремы 3 видно, что R -полная подкатегория R -полной подкатегории будет R -полной.

Теорема 4. Если категория K мультипликативно замкнута, то всякая ее R -полная подкатегория мультипликативно замкнута. Если K содержит единичную структуру, то ее содержит и всякая R -полная подкатегория категории K .

Структуру $\mathfrak{A}$ категории K назовем регулярной, если для любого множества S элементов $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{A}$ существует подструктура, содержащая S в качестве своего K -плотного множества. Категория K будет называться регулярной, если регулярны все ее структуры.

Теорема 5. Если подкатегория L категории структур K содержит единичную структуру, мультипликативно замкнута, регулярна и ограничена, то L R -полна и всякая система L -структур имеет определенную L -свободную композицию.

Доказательство аналогично доказательству теоремы о существовании топологических алгебр с данными определяющими соотношениями и топологическим порождающим пространством ⁽⁵⁾.

4. Обозначим через K класс всех моделей фиксированного типа $\langle P_1, P_2, \dots \rangle$, где P_i — основные предикатные символы класса.

Согласно ⁽¹⁾ однозначное отображение σ модели $\langle A; P_1, P_2, \dots \rangle$ в модель $\langle B; Q_1, Q_2, \dots \rangle$ называется гомоморфизмом, если для любых i и $a_1, a_2, \dots$ из A из истинности $P_i(a_1, a_2, \dots)$ следует истинность $Q_i(a_1\sigma, a_2\sigma, \dots)$.

Совокупность H всех таким образом определенных гомоморфизмов K -моделей удовлетворяет требованиям п. 1 и пара (K, H) является категорией структур—моделей данного типа. Легко проверяется, что при этом понятия подмодели и прямого произведения моделей совпадают с понятиями подструктуры и прямой композиции, единичной структурой является одноэлементная модель, на которой все основные предикаты истинны, а нульструктурой является одноэлементная модель с ложными основными предикатами.

Пусть теперь заданы некоторый подкласс L класса моделей K , система A символов и система F формул вида $P_i(a_1, a_2, \dots)$, $a_v \in A$. L -модель $\mathfrak{B}$ естественно назвать моделью с порождающими A и определяющими соотношениями F в классе L , если найдется отображение π системы A в $\mathfrak{B}$, обладающее свойствами: а) A^π L -плотно в $\mathfrak{B}$; б) выражения $P_i(a_1^\pi, a_2^\pi, \dots)$ истинны в $\mathfrak{B}$; в) для каждого отображения σ A в произвольную L -модель $\mathfrak{C}$ такого, что $P_i(a_1^\sigma, a_2^\sigma, \dots)$ истинны в $\mathfrak{C}$, существует гомоморфизм $\xi: \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{C}$, удовлетворяющий соотношению $\sigma = \pi\xi$.

Обозначая через $\mathfrak{U}$ модель с основным множеством A , на которой выражения из F истинны, а остальные выражения подобного вида ложны, видим, что модель $\mathfrak{B}$ с порождающими A и определяющими соотношениями F будет изоморфна реплике $\mathfrak{U}$ в L .

Можно также в качестве основного класса K взять совокупность всевозможных моделей данного типа, на основных множествах которых определены некоторые топологии, а в качестве H взять совокупность непрерывных отображений, являющихся одновременно гомоморфизмами в смысле теории моделей. Если теперь под L понимать совокупность топологических алгебр соответствующего типа, то условия теоремы 5 выполняются и L -реплика K -структуры $\mathfrak{U}$ будет топологической алгеброй, заданной в смысле ⁽⁵⁾ топологическим пространством $\mathfrak{U}$ и положительным описанием $\mathfrak{U}$ в вышеуказанном смысле.

Поступило
29 I 1958

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ А. И. Мальцев, ДАН, 109, № 2, 264 (1956). ² S. Eilenberg, S. Mac Lane, Trans. Am. Math. Soc., 58, № 2, 231 (1945). ³ S. Mac Lane, Bull. Am. Math. Soc., 56, № 6, 485 (1950). ⁴ J. R. Isbell, Canad. J. Math., 9, № 4, 563 (1957). ⁵ А. И. Мальцев, Изв. АН СССР, сер. матем., 21, № 2, 171 (1957).

А. С. МАРКУС

О ГОЛОМОРФНЫХ ОПЕРАТОР-ФУНКЦИЯХ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 6 XII 1957)

Пусть G — открытая связная область комплексной плоскости и A_λ — голоморфная в области G оператор-функция *, значения которой являются линейными замкнутыми операторами, действующими из одного комплексного банахова пространства $\mathfrak{B}_1$ в другое $\mathfrak{B}_2$. Пусть, далее, λ_0 — произвольная точка из области G и пусть при $|\lambda - \lambda_0| < \rho$ ($\rho > 0$) оператор-функция A_λ допускает разложение в сходящийся по норме операторов ряд:

$$A_\lambda = A_{\lambda_0} + \sum_{i=1}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^i C_i. \quad (1)$$

Заметим, что сходимость этого ряда при $|\lambda - \lambda_0| < \rho$ эквивалентна тому, что для каждого положительного числа ρ_1 , меньшего ρ , найдется такое число M , что

$$|C_i| < M \rho_1^{-i} \quad (i = 1, 2, \dots). \quad (2)$$

Рассмотрим произвольный вектор $x_0 \in \mathfrak{Z}(A_{\lambda_0})$. Через $\mu(x_0, A_{\lambda_0})$ обозначим наибольшее из всех целых неотрицательных чисел μ , для каждого из которых существуют такие векторы $x_{\mu 0} = x_0, x_{\mu 1}, x_{\mu 2}, \dots, x_{\mu \mu}$, что

$$\sum_{i=0}^k C_i x_{\mu, k-i} = 0 \quad (k = 0, 1, \dots, \mu),$$

где $C_0 = A_{\lambda_0}$. Если среди таких чисел не существует наибольшего, то положим $\mu(x_0, A_{\lambda_0}) = \infty$. Линеал, состоящий из всех векторов $x \in \mathfrak{Z}(A_{\lambda_0})$, для которых $\mu(x, A_{\lambda_0}) = \infty$, обозначим через $\mathfrak{N}(A_{\lambda_0})$, а размерность этого линеала — через $n(A_{\lambda_0})$.

Положим, далее, $k(\lambda) = \sup \inf_{x \in \mathfrak{N}(A_\lambda)} |x|$, где infimum берется, по всем x , решающим уравнение $A_\lambda x = y$, а supremum — по всем $y \in \mathfrak{N}(A_\lambda)$, $|y| = 1$.

В 1954 г. И. Ц. Гохберг предложил автору обобщить на случай голоморфной оператор-функции, значения которой являются Φ_+ -операторами, теорему 1 из (2) (см. также теорему 3.6 из (1)). В настоящей заметке обобщаются указанные теоремы и получаются некоторые другие результаты, относящиеся к тому же кругу вопросов ((1), теорема 8.2; (3), теорема 12; (4, 5)).

§ 1. Теорема 1. Пусть для каждой точки $\lambda \in G$ оператор A_λ является Φ_+ - (или Φ_-) оператором. Тогда существует такое множество $\Gamma \subset G$, что $G - \Gamma$ изолировано в G и что для всех $\lambda \in \Gamma$ функция $\alpha(A_\lambda)$ имеет постоянное значение: $\alpha(A_\lambda) = \alpha_0$. Если же $\lambda \in G - \Gamma$, то $\alpha(A_\lambda) > \alpha_0$. Кроме того, для всех $\lambda \in G$ функция $n(A_\lambda)$ имеет то же самое постоянное значение: $n(A_\lambda) = \alpha_0$.

* Терминология и обозначения заимствованы нами из (1). Для удобства вместо $\mathfrak{Z}_A$ мы будем писать $\mathfrak{Z}(A)$ и т. д.

Доказательство. Отметим, прежде всего, что достаточно доказать следующее утверждение: если λ_0 — произвольная точка из G , то существует такое положительное число r , что при $0 < |\lambda - \lambda_0| < r$ имеет место равенство $\alpha(A_\lambda) = n(A_\lambda) = n(A_{\lambda_0})$. Действительно, из этого утверждения с помощью обычных рассуждений (см., например, доказательство теоремы 3.3 в (1)) легко получить теорему 1.

Приступим к доказательству сформулированного выше утверждения. Рассмотрим сначала случай, когда $\mathfrak{N}(A_{\lambda_0}) = \mathfrak{Z}(A_{\lambda_0})$.

Пусть $x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0\alpha}$ ($\alpha = \alpha(A_{\lambda_0})$) — нормированный базис в $\mathfrak{Z}(A_{\lambda_0})$. Для каждого вектора x_{0k} ($k = 1, 2, \dots, \alpha$) найдется такая последовательность $x_{1k}, x_{2k}, \dots$, что

$$\sum_{i=0}^j C_i x_{j-ik} = 0 \quad (j = 0, 1, \dots). \quad (3)$$

Векторы x_{ik} ($k = 1, 2, \dots, \alpha$; $i = 1, 2, \dots$) можно выбрать так, чтобы ряды

$$x_k(\lambda) = \sum_{i=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^i x_{ik} \quad (k = 1, 2, \dots, \alpha) \quad (4)$$

сходились при $|\lambda - \lambda_0| < r_1$ ($r_1 > 0$). Для этого достаточно, например, позаботиться, чтобы выполнялись неравенства

$$|x_{ik}| \leq k(\lambda_0) |C_0 x_{ik}| \quad (k = 1, 2, \dots, \alpha; i = 1, 2, \dots). \quad (5)$$

В самом деле, из соотношений (2), (3) и (5) нетрудно получить, что

$$|x_{ik}| \leq (Mk(\lambda_0) + 1)^i \rho_1^{-i} \quad (k = 1, 2, \dots, \alpha; i = 0, 1, \dots),$$

откуда следует сходимость рядов (4) при $|\lambda - \lambda_0| < \rho_1 (Mk(\lambda_0) + 1)^{-1}$. Далее, из равенств (3) следует, что

$$A_\lambda x_k(\lambda) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, \alpha).$$

Нетрудно установить существование такого положительного числа r_2 ($\leq r_1$), что при $|\lambda - \lambda_0| < r_2$ векторы $x_k(\lambda)$ ($k = 1, 2, \dots, \alpha$) линейно независимы и, следовательно, $\alpha(A_\lambda) \geq \alpha = \alpha(A_{\lambda_0})$. Но, с другой стороны, найдется такое число r_3 (> 0), что при $|\lambda - \lambda_0| < r_3$ имеет место обратное неравенство $\alpha(A_\lambda) \leq \alpha(A_{\lambda_0})$ ((1), теорема 7.1). Следовательно, $\alpha(A_\lambda) = \alpha(A_{\lambda_0}) = n(A_{\lambda_0})$ при $|\lambda - \lambda_0| < r = \min(r_2, r_3)$.

Рассмотрим теперь случай, когда $n(A_{\lambda_0}) < \alpha(A_{\lambda_0})$. Обозначим через $\mathfrak{N}_k$ подпространство $\mathfrak{Z}(A_{\lambda_0})$, состоящее из тех векторов x , для которых $\mu(x, A_{\lambda_0}) \leq k$. В силу конечномерности $\mathfrak{Z}(A_{\lambda_0})$ найдется такое натуральное число m , что $\mathfrak{N}_m = \mathfrak{N}(A_{\lambda_0})$. Обозначим через $\mathfrak{M}_k$ прямое дополнение к подпространству $\mathfrak{N}_{k+1}$ до подпространства $\mathfrak{N}_k$ ($k = 0, 1, \dots, m-1$). Пусть $x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n}, y_{01}, y_{02}, \dots, y_{0, \alpha-n}$ ($n = n(A_{\lambda_0}), \alpha = \alpha(A_{\lambda_0})$), — нормированный базис $\mathfrak{Z}(A_{\lambda_0})$, составленный из базиса $x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n}$ подпространства $\mathfrak{N}(A_{\lambda_0})$ и базисов подпространств $\mathfrak{M}_k$ ($k = 0, 1, \dots, m-1$). Обозначим $\mu(y_{0t}, A_{\lambda_0})$ через μ_t и выберем такие элементы $y_{1t}, y_{2t}, \dots, y_{\mu_t t}$, что

$$\sum_{i=0}^l C_i y_{l-i, t} = 0 \quad (l = 0, 1, \dots, \mu_t; t = 1, 2, \dots, \alpha - n). \quad (6)$$

Пусть, далее, $\mathfrak{R}$ — некоторое $(\alpha - n)$ -мерное нормированное пространство, и $z_1, z_2, \dots, z_{\alpha-n}$ — нормированный базис в $\mathfrak{R}$. Обозначим через $\tilde{\mathfrak{Z}}_1$ прямую сумму пространств $\mathfrak{Z}_1$ и $\mathfrak{R}$, в которой норма определяется равенством

$$|y + z| = |y| + |z| \quad (y \in \mathfrak{Z}_1, z \in \mathfrak{R}).$$

Обозначим через $\tilde{C}_i$ ($i = 0, 1, \dots$) операторы, действующие из $\tilde{\mathfrak{B}}_1$ в $\mathfrak{B}_2$, совпадающие в $\mathfrak{B}_1$ с C_i и определенные на $\mathfrak{R}$ равенствами

$$\tilde{C}_i z_t = - \sum_{j=1}^{\mu_t+1} C_{i+j} y_{\mu_t+1-j, t} \quad (t = 1, 2, \dots, \alpha - n; i = 0, 1, \dots). \quad (7)$$

Нетрудно показать, что $\tilde{C}_0$ обращается в нуль на $\mathfrak{R}$ только в нуле; отсюда следует, что $\mathfrak{Z}(\tilde{C}_0) = \mathfrak{Z}(C_0)$. Положим, далее,

$$\tilde{A}_\lambda = \tilde{C}_0 + \sum_{i=1}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^i \tilde{C}_i.$$

Нетрудно установить, что этот ряд вместе с рядом (1) сходится при $|\lambda - \lambda_0| < \rho$ и что для указанных значений λ оператор $\tilde{A}_\lambda$, будучи расширением на $\alpha - n$ измерений оператора A_λ , также является Φ_+ - (или Φ_-) оператором.

Покажем теперь, что $\mathfrak{N}(\tilde{A}_{\lambda_0}) = \mathfrak{Z}(\tilde{A}_{\lambda_0})$. Для этого достаточно установить, что для всякого вектора y_{0t} ($t = 1, 2, \dots, \alpha - n$) существует такая последовательность $\tilde{y}_{1t}, \tilde{y}_{2t}, \dots$, что

$$\sum_{i=0}^{j-1} \tilde{C}_i \tilde{y}_{j-i, t} + \tilde{C}_j y_{0t} = 0 \quad (j = 0, 1, \dots). \quad (8)$$

Но достаточно положить $\tilde{y}_{it} = y_{it}$ ($i = 1, 2, \dots, \mu_t$); $\tilde{y}_{\mu_t+1, t} = z_t$; $\tilde{y}_{it} = 0$ ($i = \mu_t + 2, \mu_t + 3, \dots$), и, в силу равенств (6) и (7), соотношения (8) будут выполнены. Применяя к оператору $\tilde{A}_\lambda$ результат первой части доказательства, получим, что при $|\lambda - \lambda_0| < r$ имеет место равенство $\alpha(\tilde{A}_\lambda) = \alpha(\tilde{A}_{\lambda_0}) = \alpha(A_{\lambda_0})$, причем базис подпространства $\mathfrak{Z}(A_\lambda)$ состоит из векторов $x_k(\lambda) = \sum_{i=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^i x_{ik}$ ($k = 1, 2, \dots, n$); $y_t(\lambda) = \sum_{i=0}^{\mu_t} (\lambda - \lambda_0)^i y_{it} + (\lambda - \lambda_0)^{\mu_t+1} z_t$ ($t = 1, 2, \dots, \alpha - n$).

Так как $\mathfrak{Z}(A_\lambda) = \mathfrak{Z}(\tilde{A}_\lambda) \cap \mathfrak{B}_1$, то $\dim \mathfrak{Z}(\tilde{A}_\lambda) / \mathfrak{Z}(A_\lambda) \leq \dim \tilde{\mathfrak{B}}_1 / \mathfrak{B}_1 = \alpha - n$. С другой стороны, легко видеть, что при $\lambda \neq \lambda_0$ подпространство, натянутое на элементы $y_t(\lambda)$ ($t = 1, 2, \dots, \alpha - n$) пересекается с $\mathfrak{B}_1$ только в нуле, и, следовательно, $\dim \mathfrak{Z}(\tilde{A}_\lambda) / \mathfrak{Z}(A_\lambda) \geq \alpha - n$.

Таким образом, $\dim \mathfrak{Z}(\tilde{A}_\lambda) / \mathfrak{Z}(A_\lambda) = \alpha - n$ при $0 < |\lambda - \lambda_0| < r$, и поэтому $\alpha(A_\lambda) = \dim \mathfrak{Z}(A_\lambda) = \alpha - (\alpha - n) = n(A_{\lambda_0})$.

Нам осталось доказать, что $n(A_\lambda) = n(A_{\lambda_0})$ при $|\lambda - \lambda_0| < r$. Допустим, что для некоторой точки λ' ($|\lambda' - \lambda_0| < r$) $n(A_{\lambda'}) < n(A_{\lambda_0})$. Но тогда существует такое число $r' (> 0)$, что $\alpha(A_\lambda) = n(A_{\lambda'}) < n(A_{\lambda_0})$ при $0 < |\lambda - \lambda'| < r'$. Так как найдутся точки, удовлетворяющие одновременно неравенствам $0 < |\lambda - \lambda_0| < r$ и $0 < |\lambda - \lambda'| < r'$, то мы пришли к противоречию.

Теорема полностью доказана.

Теорема 2. Пусть для каждой точки $\lambda \in G$ оператор A_λ является Φ_- -оператором. Тогда существует такое множество $\Gamma \subset G$, что $G - \Gamma$ изолировано в G и что для всех $\lambda \in \Gamma$ функция $\beta(A_\lambda)$ имеет постоянное значение: $\beta(A_\lambda) = \beta_0$. Если же $\lambda \in G - \Gamma$, то $\beta(A_\lambda) > \beta_0$. Кроме того, $\mathfrak{N}(A_\lambda) = \mathfrak{Z}(A_\lambda)$ для всех $\lambda \in \Gamma$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}(A_\lambda)$ при $\lambda \in G$. Обозначим через $\hat{A}_\lambda$ оператор, действующий так же, как A_λ , из пространства $\tilde{\mathfrak{B}} = \mathfrak{D}$ в пространство $\mathfrak{B}_2$, и пусть $\hat{A}_\lambda^+$ — сопряженный к нему оператор. Применяя

теорему 1 к голоморфной оператор-функции $\hat{A}_\lambda^+$, значения которой являются $\bar{\Phi}_+$ -операторами, и учитывая, что $\alpha(\hat{A}_\lambda^+) = \beta(A_\lambda)$ и что из равенства $\mathfrak{N}(\hat{A}_\lambda^+) = \mathfrak{Z}(\hat{A}_\lambda^+)$ следует равенство $\mathfrak{N}(A_\lambda) = \mathfrak{Z}(A_\lambda)$, немедленно получаем теорему 2.

§ 2. Пусть Γ — множество комплексных чисел, о котором идет речь в формулировке теоремы 1 или теоремы 2. Можно доказать, что функция $k(\lambda)$ непрерывна в Γ . С помощью этого утверждения и метода доказательства из ⁽⁵⁾ результаты § 2 заметки ⁽⁴⁾ полностью переносятся на рассматриваемый случай.

Отметим в заключение, что с помощью общего приема, указанного Б. С.-Надь ^(6, 7) (см. также ⁽¹⁾), все результаты настоящей заметки могут быть перенесены на случай, когда условие голоморфности A_λ заменено следующим более общим условием: значения оператор-функции A_λ являются линейными замкнутыми операторами, имеющими для всех $\lambda \in G$ одну и ту же область определения $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}(A_\lambda)$, и для каждой точки $\lambda_0 \in G$ существуют такое положительное число ρ и такие линейные операторы $C_1, C_2, \dots$, что $\mathfrak{D}(C_i) \supseteq \mathfrak{D}$ ($i = 1, 2, \dots$) и что при $|\lambda - \lambda_0| < \rho$ для каждого $x \in \mathfrak{D}$

$$A_\lambda x = A_{\lambda_0} x + \sum_{i=1}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^i C_i x.$$

Автор пользуется случаем выразить благодарность И. Ц. Гохбергу и И. А. Фельдману за ряд ценных замечаний.

Кишиневский государственный
университет

Поступило
22 XI 1957

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, Усп. матем. наук, **12**, в. 2, 43 (1957).
² И. Ц. Гохберг, ДАН, **78**, № 4, 629 (1951). ³ F. V. Atkinson, Acta Sci. Math., **15**, 1, 38 (1953). ⁴ И. Ц. Гохберг, А. С. Маркус, ДАН, **105**, № 5, 893 (1955). ⁵ А. С. Маркус, ДАН, **105**, № 6, 1144 (1955). ⁶ B. Sz-Nagy, Acta Sci. Math., Szeged., **14**, № 2, 125 (1951). ⁷ B. Sz-Nagy, Acta Math. Acad. Sci. Hungar., **3**, №1—2, 49 (1952).

К. А. МИХАЙЛОВА

ПРОБЛЕМА ВХОЖДЕНИЯ ДЛЯ ПРЯМЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ ГРУПП

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 17 XII 1957)

Сильной проблемой вхождения для группы $\mathfrak{A}$ назовем следующую проблему:

Существует ли алгоритм, позволяющий определять для всякого слова группы $\mathfrak{A}$ и для всякой подгруппы, порожденной конечным числом слов группы $\mathfrak{A}$, принадлежит ли это слово подгруппе?

Слабой проблемой вхождения для группы $\mathfrak{A}$ назовем проблему:

Существуют ли алгоритмы для всякой подгруппы, порожденной конечным числом слов группы $\mathfrak{A}$, позволяющие определять для всякого слова группы $\mathfrak{A}$, принадлежит ли оно подгруппе?

В случае существования алгоритма (алгоритмов) будем говорить, что проблема вхождения для группы $\mathfrak{A}$ разрешима. В противном случае, т. е. если такого алгоритма (алгоритмов) нет, будем говорить, что для группы $\mathfrak{A}$ проблема вхождения неразрешима.

Из разрешимости сильной проблемы вхождения следует разрешимость слабой проблемы вхождения.

Проблему тождества для группы $\mathfrak{A}$ можно сформулировать следующим образом:

Существует ли алгоритм, позволяющий определять для всякого слова группы $\mathfrak{A}$, принадлежит ли оно единичной подгруппе группы $\mathfrak{A}$? Из разрешимости слабой проблемы вхождения для группы $\mathfrak{A}$ следует разрешимость проблемы тождества для нее.

Мы будем рассматривать конечно-определенные группы, т. е. группы, заданные конечным числом образующих и конечным числом определяющих соотношений.

Известно, что для свободной группы сильная проблема вхождения разрешима ⁽¹⁾.

Настоящая статья содержит некоторые результаты, касающиеся разрешимости проблемы вхождения, как слабой, так и сильной, для прямых произведений групп. Прежде всего возникает вопрос: сохраняет ли прямое произведение разрешимость сильной или слабой проблемы вхождения для группы. Этот вопрос решается отрицательно, что следует из теоремы 1.

Теорема 1. Слабая проблема вхождения для прямого произведения двух свободных групп, каждая из которых задается двумя образующими, неразрешима.

Пусть $\mathfrak{A}$ — конечно-определенная группа с неразрешимой проблемой тождества (существование такой группы доказано П. С. Новиковым ⁽²⁾), заданная k образующими $a_1, \dots, a_k$, среди которых содержатся все обратные им, и n определяющими соотношениями $A_i = 1$, где $i = 1, \dots, n$.

Через $\mathfrak{A}_0$ обозначим свободную группу с образующими: $a_1, \dots, a_k$.

Рассмотрим подгруппу группы $\mathfrak{A}_0$, содержащую такие и только такие слова, которые имеют вид

$$U = X_1^{-1} A_{j_1} X_1 \dots X_k^{-1} A_{j_k} X_k, \quad (1)$$

где X_q — слова, составленные из букв $a_1, \dots, a_k$, и $1 \leq j_q \leq n$.

Для того чтобы слово было равно единице в группе $\mathfrak{A}$, необходимо и достаточно, чтобы оно имело вид (1).

Через $\mathfrak{A}_0^+$ обозначим свободную группу с образующими $a_1^+, \dots, a_k^+$, занумерованными в таком порядке, чтобы имели одинаковые номера обратные элементы для образующих группы $\mathfrak{A}_0$ и группы $\mathfrak{A}_0^+$ с одинаковыми номерами.

Обозначим через G подгруппу прямого произведения $\mathfrak{A}_0 \times \mathfrak{A}_0^+$, порождаемую конечным числом слов $A_1, \dots, A_n$, $a_1^{-1}a_1^+, a_2^{-1}a_2^+, \dots, a_k^{-1}a_k^+$. Всякое слово вида (1) принадлежит группе G и всякое слово группы G , не содержащее образующих группы $\mathfrak{A}_0^+$, имеет вид (1).

1) Пусть $U = X_1^{-1}A_{j_1}X_1X_2^{-1}A_{j_2}X_2 \dots X_n^{-1}A_{j_n}X_n$. Достаточно показать, что принадлежность группе G всякого слова $U' = X^{-1}A_jX$, где $j = 1, \dots, n$. Пусть $X = a_{i_1} \dots a_{i_n}$; тогда $X^{-1} = a_{i_n}^{-1} \dots a_{i_1}^{-1}$. Рассмотрим слово $Y = a_{i_n}^+ \dots a_{i_1}^+$, тогда $Y^{-1} = a_{i_1}^{+^{-1}} \dots a_{i_n}^{+^{-1}}$, $X^{-1}A_jX = X^{-1}YA_jY^{-1}X = a_{i_n}^{-1}a_{i_n}^+ \dots a_{i_1}^{-1}a_{i_1}^+ A_j a_{i_1}^{+^{-1}} \dots a_{i_n}^{+^{-1}}$, т. е. $X^{-1}A_jX$ принадлежит группе G , а следовательно, и U принадлежит группе G .

2) Пусть $U = Y_1A_{j_1}Y_2A_{j_2} \dots A_{j_k}Y_{k+1}$, где Y_i составлено из образующих $a_1^{-1}a_1^+, a_2^{-1}a_2^+, \dots, a_k^{-1}a_k^+$. Запишем слово U в виде $U = Z_1A_{j_1}Z_1^{-1}Z_2A_{j_2}Z_2^{-1} \dots Z_kA_{j_k}Z_k^{-1}$, где $Z_1 \equiv Y_1$, $Z_i \equiv Y_{i-1}Y_i$, $i = 1, \dots, k+1$. Очевидно, $Z_{k+1} = 1$. После сокращения букв $a_1^+, \dots, a_k^+$ получаем $U = X_1^{-1}A_{j_1}X_1 \dots X_n^{-1}A_{j_n}X_n$.

Отсюда вытекает следующее предложение: из разрешимости слабой проблемы вхождения для группы $\mathfrak{A}_0 \times \mathfrak{A}_0^+$ следует разрешимость проблемы тождества для группы $\mathfrak{A}$.

Используя это предложение и тот факт, что всякая свободная группа с любым конечным числом образующих является подгруппой свободной группы с двумя образующими, получаем результат, сформулированный в теореме.

Итак, прямое произведение не сохраняет разрешимости как сильной, так и слабой проблемы вхождения, но, тем не менее, можно выделять некоторые классы групп, для которых прямое произведение на любую группу с разрешимой сильной (слабой) проблемой вхождения сохраняет разрешимость сильной (слабой) проблемы вхождения. Таким классом оказался, в частности, класс абелевых групп.

Теорема 2. Проблема вхождения для прямого произведения абелевой группы с разрешимой сильной (слабой) проблемой вхождения разрешима в сильном (слабом) смысле.

За невозможностью провести полное доказательство в рамках данной статьи, ограничимся лишь его схемой.

Пусть $\mathfrak{A}$ — циклическая группа, заданная образующей a ; $\mathfrak{B}$ — группа с разрешимой проблемой вхождения. Пусть G — подгруппа прямого произведения, заданная конечным числом образующих. Очевидно, все образующие подгруппы могут быть записаны следующим образом: a^{m_i} ; $a^{n_i}B_j$; B'_s , где все m_i или все n_j могут равняться нулю, а B_j и B'_s — слова из группы $\mathfrak{B}$.

Пусть q — наибольший общий делитель чисел m_i и n_j (если все m_i и n_j равны нулю, то группа G является подгруппой группы $\mathfrak{B}$, для которой разрешима проблема вхождения), а d — наибольший общий делитель чисел m_i (если все m_i равны нулю, то $d = 0$), $d = rq$. Тогда можно записать образующие подгруппы G в виде a^d ; a^qB_0 ; B''_s , где B_0 — фиксированное слово из группы $\mathfrak{B}$, а среди B''_s , кроме B'_s , содержатся еще некоторые слова из G , представляющие собой произведение образующих группы $\mathfrak{B}$.

Пусть G^* — подгруппа группы G , состоящая из таких и только таких слов, которые хотя бы в одной из своих записей не содержат образующей a группы $\mathfrak{A}$. Вопрос о принадлежности произвольного слова X группе G

эквивалентен вопросу о принадлежности группе G^* некоторого слова Y из группы $\mathfrak{B}$, отыскиваемого по слову X .

Для случая, когда $\mathfrak{A}$ — конечная группа, удалось показать, что группа G^* может быть задана конечным числом образующих. А так как при этом G^* является подгруппой группы, имеющей разрешимую проблему вхождения, то и для прямого произведения $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ также будет разрешима проблема вхождения.

Если же $\mathfrak{A}$ — бесконечная группа, рассматриваются два случая: 1) $r \neq 0$ и 2) $r = 0$, где $r = d/q$.

В первом случае доказывается, что G^* может быть задана конечным числом образующих.

Для второго случая доказывается следующее предложение:

Если для группы K и для всякого слова из прямого произведения $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ можно распознавать принадлежность его к группе K , то и для группы K^* и для всякого слова из прямого произведения $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ можно распознавать принадлежность его группе K^* , где K — подгруппа группы с образующими $a^q; a^q B_0; B_s''$ ($s \neq 0$), состоящая из таких и только таких слов, которые не содержат образующей a группы $\mathfrak{A}$, а K^* — подгруппа группы с образующими $a^q B_0; B_s''$, состоящая из таких и только таких слов, которые не содержат образующей a группы $\mathfrak{A}$. Таким образом, второй случай сводится к первому.

Для группы G^* можно провести то же рассуждение, что и для случая, когда $\mathfrak{A}$ — конечная циклическая группа, откуда и получаем разрешимость проблемы вхождения для прямого произведения циклической группы и группы с разрешимой проблемой вхождения.

Учитывая то обстоятельство, что абелеву группу можно рассматривать как прямое произведение циклических групп, получаем результат, сформулированный в теореме 2.

Если класс абелевых групп несколько расширить, то оказывается верной следующая теорема.

Теорема 3. Для прямого произведения группы с разрешимой слабой проблемой вхождения и группы с разрешимой сильной проблемой вхождения, каждая подгруппа которой может быть задана конечным числом образующих, нельзя доказать неразрешимость слабой проблемы вхождения.

Пусть $\mathfrak{A}$ — группа с разрешимой сильной проблемой вхождения и с указанным в формулировке теоремы свойством, $\mathfrak{B}$ — группа с разрешимой слабой проблемой вхождения. Пусть G — подгруппа группы $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ с образующими $C_1, \dots, C_k; C_i = A_i B_i$, где $A_i \in \mathfrak{A}$, $B_i \in \mathfrak{B}$ ($i = 1, \dots, k$). Пусть $X = AB \in G$, где $A \in \mathfrak{A}$, $B \in \mathfrak{B}$. Тогда $AB = C_{i_1} \dots C_{i_l} = A_{i_1} B_{i_1} \dots A_{i_l} B_{i_l}$. Следовательно, B представимо в виде произведения правых частей слов C_i . То же самое относится и к B^{-1} : $B^{-1} = B_{j_1} \dots B_{j_l}$. Произведение соответствующих левых частей C_i обозначим через A^* , т. е. $A^* = A_{j_1} \dots A_{j_l}$.

$AB B^{-1} A^* \in G$, так как $B^{-1} A^* \in G$. Следовательно, $AA^* \in G$, и, наоборот, если $AA^* \in G$, то $AB \in G$.

Таким образом, задача сводится к тому, чтобы уметь определять для слов вида AA^* , принадлежат ли они подгруппе группы G , которая может быть задана конечным числом образующих.

Московский государственный педагогический институт
им. В. И. Ленина

Поступило
12 XII 1957

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ J. Nielsen; Math. Scand., № 1, 31 (1955). ² П. С. Новиков, Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, 44 (1955). ³ А. Г. Курош, Теория групп, М.—Л., 1953.

Г. Я. ГАЛИН

ОБ УДАРНЫХ ВОЛНАХ В СРЕДАХ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ УРАВНЕНИЕМ СОСТОЯНИЯ

(Представлено академиком Л. И. Седовым 7 XII 1957)

Рассматриваются прямые скачки в средах, внутренняя энергия которых полностью определяется значением удельного объема и энтропии.

Если функция $E = E(V, S)$ известна, то уравнение

$$dE = T dS - p dV \quad (1)$$

дает еще два соотношения между пятью величинами: удельным объемом V , давлением p , абсолютной температурой T , внутренней энергией E и энтропией S , определяющими состояние среды. Три конечных уравнения между V , p , T , E , S описывают все механические и термические свойства тела (поскольку речь идет об обратимых процессах). Вид функции $E = E(V, S)$ не может быть установлен термодинамическими рассуждениями, но из термодинамики следует ряд ограничений на соотношения между V , p , T , E , S (см., например, ⁽⁸⁾). То, что в связи между p , V , S не может быть получено термодинамическими рассуждениями, и определяет термин «произвольное уравнение состояния». Таким произволом, в частности, остается знак производной $(\partial^2 p / \partial V^2)_S$, который существенно влияет на характер свойства ударных переходов. Подробно изучены прямые скачки в средах, у которых знак $(\partial^2 p / \partial V^2)_S$ во всей области постоянен. (Изложение вопроса исторические и библиографические справки можно найти в ⁽¹⁻⁵⁾.)

Известные методы теоретического исследования опираются на дифференциальные соотношения, имеющие место вдоль адиабаты Гюгонио, и позволяют полностью провести исследование, когда знак $(d^2 p / dV^2)_S$ постоянен. В случае, когда знак $(\partial^2 p / \partial V^2)_S$ меняется, данные, доставляемые этими методами, оказываются недостаточными для определения вида и свойств ударных адиабат.

В настоящем сообщении излагаются дополнительные сведения об ударных адиабатах, которые в совокупности с известными фактами и методами позволяют построить адиабаты Гюгонио и исследовать свойства ударного перехода для сред с произвольным уравнением состояния, когда производная $(\partial^2 p / \partial V^2)_S$ меняет знак вдоль адиабат Пуассона.

Пусть в результате процесса, схематизируемого поверхностью сильного разрыва, частица переходит из состояния 1 в состояние 2. Характеристики, относящиеся к этим состояниям (условимся отмечать их индексами 1 и 2), связаны тремя соотношениями, следующими из законов сохранения ⁽²⁾:

$$\frac{\omega_1}{V_1} = \frac{\omega_2}{V_2} = j, \quad (2)$$

$$j^2 = \frac{p_2 - p_1}{V_1 - V_2}; \quad (3)$$

$$E_2(V_2, p_2) - E_1(V_1, p_1) = \frac{1}{2}(p_1 + p_2)(V_1 - V_2). \quad (4)$$

Здесь ω — скорость поверхности разрыва относительно среды, j — плотность потока через поверхность разрыва.

При фиксированных V_1, p_1 и переменных V_2, p_2 (4) дает на диаграмме $V-p$ график адиабаты Гюгонио с центром (V_1, p_1) . К (2) — (4) должно быть присоединено условие, отражающее необратимый характер процесса:

$$S_2 \geq S_1. \quad (5)$$

Сопоставим рассматриваемому переходу обратимый процесс. Подсчитаем приращение внутренней энергии, соответствующее ударному переходу,

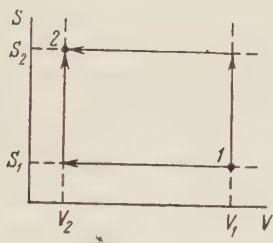


Рис. 1

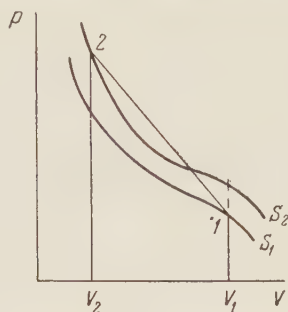


Рис. 2

переведа частицу обратимым путем из состояния 1 в состояние 2, причем сделаем это двояким образом, как показано на рис. 1. В результате, согласно (1), будем иметь:

$$E_2 - E_1 = \int_{S_1}^{S_2} T \Big|_{V=V_2} dS - \int_{V_1}^{V_2} p \Big|_{S=S_1} dV; \quad (6)$$

$$E_2 - E_1 = \int_{S_1}^{S_2} T \Big|_{V=V_1} dS - \int_{V_1}^{V_2} p \Big|_{S=S_2} dV. \quad (7)$$

Подставляя поочередно (6) и (7) в (4) и учитывая (5), получим ограничения, которые налагает условие (5) на изменение механических характеристик в ударной волне:

$$\left\{ \frac{p_1 + p_2}{2} (V_1 - V_2) - \int_{V_2}^{V_1} p \Big|_{S=S_1} dV \right\} \geq 0; \quad (8)$$

$$\left\{ \frac{p_1 + p_2}{2} (V_1 - V_2) - \int_{V_2}^{V_1} p \Big|_{S=S_2} dV \right\} \geq 0. \quad (9)$$

Для выяснения свойств ударных переходов полезна геометрическая интерпретация неравенств (8), (9) (см. рис. 2). В (4) указано только неравенство (8). Заметим, что при $(\partial p / \partial S)_V > 0$ и $V_1 > V_2$ необходимым и достаточным условием неубывания энтропии является выполнение неравенства (9), неравенство же (8) будет удовлетворено как следствие (9); при $V_1 < V_2$ (9) будет следствием (8). При $(\partial p / \partial S)_V < 0$ неравенства поменяются ролями. Поскольку представляет интерес вся область изменения V , в которой определена ударная адиабата, необходимо иметь в виду оба неравенства.

Поставим вопрос: может ли адиабата Гюгонио иметь с адиабатой Пуассона больше одной общей точки. Ответ на этот вопрос дает следующее предложение:

Теорема 1. Если адиабата Гюгонио с центром (V_1, p_1) имеет с адиабатой Пуассона $S = S_2$ общую точку (V_2, p_2) и, кроме того, на адиабате

Пуассона есть точки (V_i, p_i) , удовлетворяющие условию

$$\frac{p_1 + p_i}{2} (V_1 - V_i) = \frac{p_1 + p_2}{2} (V_1 - V_2) + \int_{V_i}^{V_2} p|_{S=S_2} dV, \quad (10)$$

то ударная адиабата пройдет через точки (V_i, p_i) ; других общих точек у них не будет. Точка (V_1, p_1) будет лежать на ударных адиабатах с центрами (V_2, p_2) и (V_i, p_i) .

Действительно, так как, по условию, $E_2 - E_1 = \frac{p_1 + p_2}{2} (V_1 - V_2)$ и, согласно (1), $\int_{V_i}^{V_2} p|_{S=S_2} dV = E_i - E_2$, то из (10) $E_i - E_1 = \frac{p_1 + p_i}{2} (V_1 - V_i)$.

Предположив, что ударная адиабата пройдет через точку адиабаты Пуассона, не удовлетворяющую условию (10), приходим к противоречию.

Если точки (V_1, p_1) и (V_2, p_2) совпадают, то вместо (10) будем иметь

$$\frac{p_1 + p_i}{2} (V_1 - V_i) = \int_{V_i}^{V_1} p|_{S=S_1} dV. \quad (11)$$

Если адиабата Пуассона на некотором участке является отрезком прямой, то, как видно из (11), адиабата Гюгонио с центром на этом отрезке совпадает с последним на рассматриваемом участке.

Опираясь на теорему 1, можно решить вопрос о возможности ударных волн сжатия и разрежения. Когда всюду $(\partial^2 p / \partial V^2)_S > 0$ (или $(\partial^2 p / \partial V^2)_S < 0$),

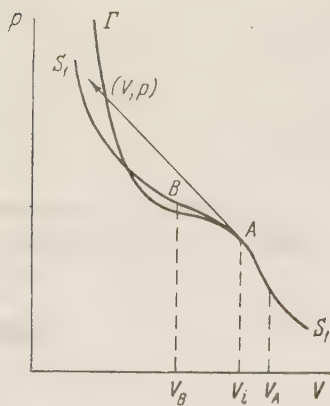


Рис. 3

ответ для всей области однозначен и дается теоремой Цемплена. Если же вторая производная $(\partial^2 p / \partial V^2)_S$ меняет знак, то однозначного ответа для всей области указать нельзя. В центре $(\partial p / \partial V)_\Gamma = (\partial p / \partial V)_S < 0$ и, если первая отличная от нуля старшая производная есть $(\partial^n p / \partial V^n)_S$, то $(\partial S / \partial V)_\Gamma = \dots = (\partial^n S / \partial V^n)_\Gamma = 0$, $(\partial^{n+1} S / \partial V^{n+1})_\Gamma = -\frac{1}{2T} \left(\frac{\partial^n p}{\partial V^n} \right)_S$.

При заданном начальном состоянии эти соотношения определяют относительное расположение адиабат Гюгонио и Пуассона в центре; теорема 1 позволяет судить о их взаимном расположении вне центра. Надо иметь в виду, что, как известно ⁽²⁾, адиабата Гюгонио не может пересечь прямых $V = V_1$, $p = p_1$ вне центра (V_1, p_1) .

Если в области $V_2 \leq V \leq V_1$ адиабата Гюгонио имеет с одной из адиабат Пуассона больше одной общей точки, то в этой области производная $(\partial^2 p / \partial V^2)_S$ меняет знак вдоль адиабаты Гюгонио.

Обратное утверждение неверно.

Отметим еще следующие свойства ударных адиабат.

Фиксируем точку (V_1, p_1) и проведем через нее ударную адиабату и луч. Если этот луч пересечет ударную адиабату в точках (V_2, p_2) , (V_3, p_3) , то точки (V_k, p_k) ($k = 1, 2, 3$) будут лежать одновременно на каждой из ударных адиабат с центром (V_k, p_k) .

Справедливо и обратное утверждение: если три точки одновременно лежат на каждой из ударных адиабат с центрами в этих точках, то последние лежат на одной прямой.

Построим ударные адиабаты с центрами в точках (V_i, p_i) ($V_B \leq V_i \leq V_A$) адиабаты Пуассона $S = S_1$ (рис. 3). Соответствующая сжатию ветвь каждой ударной адиабаты пересечется построенной в центре касательной в точке (V, p) . Совокупность таких точек образует непрерывную кривую, определяемую уравнениями

$$p - p_i(V_i) - \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right) \Big|_{V=V_i} (V - V_i) = 0,$$

$$E(V, p) - E[V_i, p_i(V_i)] + \frac{1}{2}(V - V_i)[p + p_i(V_i)] = 0. \quad V_B \leq V_i \leq V_A.$$

Эта кривая с каждой из горизонталей $p = \text{const}$ пересекается только в одной точке.

Вдоль адиабаты Гюгонио $\left[T \left(\frac{\partial S}{\partial p} \right)_V - \frac{V_1 - V}{2} \right] \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_\Gamma + \left[T \left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_p - \frac{p - p_1}{2} \right] = 0$. Так как $(\partial S / \partial p)_V$ и $(\partial S / \partial V)_p$ одного знака, то $(\partial p / \partial V)_\Gamma < 0$ в области разрежения ($V_1 < V$) при $(\partial p / \partial S)_V > 0$ и в области сжатия ($V_1 > V$) при $(\partial p / \partial S)_V < 0$. В области сжатия при $(\partial p / \partial S)_V > 0$ (разрежения при $(\partial p / \partial S)_V < 0$) производная $(\partial p / \partial V)_\Gamma$ может быть как отрицательной, так и положительной. В частности, принципиально возможен случай, когда в конечной точке $\left(\frac{\partial S}{\partial p} \right)_V = \frac{V_1 - V}{2T}$, и соответствующая сжатию ветвь ударной адиабаты будет иметь вид, изображенный на рис. 4. Этот случай в ⁽²⁾ рассматривается как маловероятный; в ⁽⁶⁾ утверждается, что равенство $\left(\frac{\partial S}{\partial p} \right)_V = \frac{V_1 - V}{2T}$ не может иметь места в конечной точке, однако в рассуждениях содержится неточность.

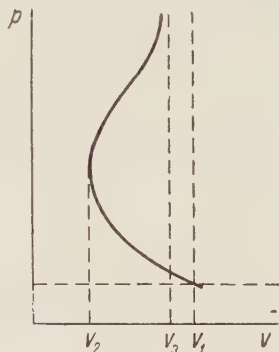


Рис. 4

Для рассматриваемых сред при известном начальном состоянии и заданной скорости поверхности разрыва или скорости газа соотношения (2) — (4) не всегда единственным образом определяют ударный переход.

Легко видеть, что изложенное выше применимо и к твердым телам, когда элементарная работа внутренних сил представляется в виде одночлена $X dy$. Распространение мгновенных возмущений в средах с нелинейной зависимостью напряжения от деформации $\sigma = \sigma(e)$, когда всюду $(\partial \sigma / \partial e) > 0$, $\partial \sigma / \partial S = 0$, а $\partial^2 \sigma / \partial e^2$ меняет знак, рассмотрено впервые в ⁽⁷⁾.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
6 XII 1957

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ Н. Е. Кочин, Собр. соч., 2, Изд. АН СССР, 1949, стр. 5. ² Л. Д. Ландау, Е. М. Лившиц, Механика сплошных сред, 1953. ³ Л. И. Седов, Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики, 1950. ⁴ Я. Б. Зельдович, Теория ударных волн и введение в газодинамику, 1946. ⁵ Г. Курант, К. Фридрихс, Сверхзвуковое течение и ударные волны, 1950. ⁶ К. П. Станюкович, Неуставившиеся движения сплошной среды, 1955. ⁷ Г. И. Баренблатт, Прикл. матем. и мех., 17 в. 4 (1953). ⁸ П. С. Эпштейн, Курс термодинамики, 1948.

Л. А. ДОРФМАН

ТЕПЛОВОЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ НА ВРАЩАЮЩЕМСЯ ДИСКЕ

(Представлено академиком Л. И. Седовым 31 XII 1957)

1. Сопоставим уравнение тангенциальных скоростей осредненного турбулентного движения несжимаемой жидкости в пограничном слое вращающегося диска

$$v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{v_r v_\varphi}{r} + v_z \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} - \overline{v'_z v'_\varphi} \right) \quad (1)$$

с уравнением энергии без диссипативных членов

$$v_r \frac{\partial T}{\partial r} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(a \frac{\partial T}{\partial z} - \overline{v'_z T'} \right), \quad (2)$$

где v_r , v_φ , v_z , T — осредненные значения компонентов скорости и температуры, а со штрихами — пульсационные составляющие (черта сверху — знак осреднения); ν — кинематическая вязкость; $a = \lambda / c_p \rho$ — температуропроводность. Замечаем, что при квадратичном распределении температур на стенке $T_{\text{ст}} = r^2$ и $\text{Pr} = \nu / a = 1$ ($T_\infty = 0$) профили температур $\theta(z, r) = T / r^2$ и тангенциальных скоростей $G(z, r) = v_\varphi / r\omega$ совпадают, так как уравнения (1) и (2) принимают одинаковый вид

$$v_r \frac{\partial R}{\partial r} + 2R \frac{v_r}{r} + v_z \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \frac{\partial R}{\partial z} - \overline{v'_z R'} \right); \quad R = G, \theta$$

и граничные условия одинаковы

$$G(0, r) = \theta(0, r) = 1; \quad G(\infty, r) = \theta(\infty, r) = 0.$$

При этом полагаем одинаковыми для v_φ и T соотношения между пульсационными и осредненными составляющими.

Отсюда получаем следующую связь между напряжением трения $\tau_\varphi = \mu \partial v_\varphi / \partial z - \rho \overline{v'_z v'_\varphi}$ и потоком тепла $q = \lambda \partial T / \partial z - c_p \rho \overline{v'_z T'}$:

$$q = c_p \tau_\varphi \frac{T_{\text{ст}}}{r\omega}. \quad (3)$$

Заметим, что полученный результат охватывает также и случай ламинарного потока ⁽¹⁾, когда нет пульсационных составляющих. Используя решение Кокрэнна для τ_φ ⁽²⁾, получаем в этом случае

$$\text{Nu} = \frac{qr}{\lambda T_{\text{ст}}} = 0,616 \text{Re}^{1/2}, \quad \text{Re} = \frac{r^2 \omega}{\nu}. \quad (4)$$

Для турбулентного режима, согласно уточненному решению ⁽³⁾ и в соответствии с опытными данными, момент сопротивления M одной стороны диска можно выразить при $\text{Re} = 10^5 \div 10^7$ в виде

$M=0,157 \operatorname{Re}^{-0,21/4} \rho \omega^2 r^5$, что дает

$$\operatorname{Nu} = \frac{dM/dr}{2\pi\omega r^2\mu} = 0,0287 \operatorname{Re}^{0,8}. \quad (5)$$

При наличии обдува диска перпендикулярным к поверхности диска несимметричным потоком дополнительные составляющие скорости

$$v_r^0 = \alpha r, \quad v_\varphi^0 = 0, \quad v_z^0 = -2\alpha z$$

не меняют граничных условий для G , поэтому сохраняется (3), т. е.

$$\frac{\operatorname{Nu}}{\operatorname{Nu}|_{\alpha=0}} = \frac{\tau_\varphi}{\tau_\varphi|_{\alpha=0}} = \Phi\left(\frac{\alpha}{\omega}\right). \quad (6)$$

Функция $\Phi(\alpha/\omega)$ определена в работах (1,4).

2. Для расчета теплоотдачи при произвольном градиенте температур составим баланс тепла для кольцевого элемента теплового пограничного слоя толщины $\delta_T/4$ и ширины dr на данном радиусе r . Секундный поток тепла в радиальном направлении через этот элемент $c_p \rho d \left(\int_0^{\delta_T} 2\pi r v_r T dz \right)$ уравнивается теплоотдачей с поверхности диска в кольцевой полосе с площадью $2\pi r dr / 2\pi q r dr$.

Отсюда получаем интегральное соотношение

$$c_p \rho \frac{d}{dr} \left(\int_0^{\delta_T} r v_r T dz \right) = r q. \quad (7)$$

Здесь отсутствуют диссипативные члены, а также, как и в (2), пренебрежимо малый для больших чисел Re член, связанный с теплопроводностью в радиальном направлении.

Вводя условную толщину потери теплосодержания $\delta_T^{**} = \int_u^{\delta_T} v_r T dz / r \omega T_{ст}$, можем представить (7) в виде

$$\frac{d\delta_T^{**}}{dr} + \delta_T^{**} \eta = \frac{\operatorname{Nu}}{\operatorname{Pr} \operatorname{Re}}, \quad \eta = \frac{dT_{ст}/dr}{T_{ст}} + \frac{2}{r}; \quad (8)$$

$$\frac{d}{dr} (\operatorname{Re}_T^{**} r T_{ст}) = \frac{\operatorname{Nu} T_{ст}}{\operatorname{Pr}}, \quad \operatorname{Re}_T^{**} = \frac{\delta_T^{**} r \omega}{\nu}. \quad (9)$$

Применим теперь, по аналогии с динамическим пограничным слоем, однопараметрический метод Л. Г. Лойцянского (5).

Полагаем, что формпараметр f_T представим в виде

$$f_T = \eta \delta_T^{**} G(\operatorname{Re}_T^{**}), \quad (10)$$

где $G(\operatorname{Re}_T^{**})$ — универсальная (независимая от η) функция степенного вида

$$G = A (\operatorname{Re}_T^{**})^m. \quad (11)$$

Умножая обе части (8) на G и произведя известные выкладки (5), получим

$$\frac{df_T}{dr} = f_T \left(\frac{\eta'}{\eta} + \frac{m}{r} \right) + F_T \eta \quad \left(\eta' = \frac{d\eta}{dr} \right), \quad (12)$$

где $F_\tau = (m+1)(\chi - f_\tau)$,

$$\chi = \frac{Nu}{Pr Re} \quad (13)$$

функция f_τ . Если нормировать χ так, чтобы $\chi = 1$ для $T_{ст} = r^2$, то, аналогично динамическому пограничному слою, можно полагать, что функция

$$F_\tau = (m+1)(1 - f_\tau) \quad (14)$$

сохранит свой вид для широкого класса распределений $T_{ст}(r)$. Тогда

$$f_\tau = \eta T_{ст}^{-(m+1)} r^{-(m+2)} \left[(m+1) \int_0^r T_{ст}^{m+1} r^{m+2} dr + C \right], \quad (15)$$

где $C = 0$ из условия конечности f_τ при $T_{ст} = r^2$ и $r = 0$. В результате получим для Re_τ^{**} формулу

$$(Re_\tau^{**})^{m+1} = \frac{m+1}{A} Re T_{ст}^{-(m+1)} r^{-(m+3)} \int_0^r T_{ст}^{m+1} r^{m+2} dr. \quad (16)$$

При этом из условия $\chi = 1$ для $T_{ст} = r^2$ по формулам (4) и (5) получаем в случае $Pr = 1$ для ламинарного режима ($Re \leq 3 \cdot 10^5$) $m = 1$, $A = 10,52$, а для турбулентного $m = 1/4$, $A = 124,2$. Таким образом, задача решена. В частности, при $T_{ст} = r^n$ получаем при $Pr = 1$ для ламинарного режима

$$Nu = 0,308 \sqrt{(n+2) Re}; \quad (17)$$

для турбулентного режима

$$Nu = 0,0212 (n+2,6)^{0,2} Re^{0,8}. \quad (18)$$

Сопоставим решение (17) для степенных распределений $T_{ст} = r^n$ с точным решением уравнения (2), которое при ламинарном режиме примет вид

$$\theta''(\zeta) = H(\zeta) \theta'(\zeta) + nF(\zeta) \theta(\zeta), \quad (19)$$

где $F(\zeta) = v_r / r\omega$, $G(\zeta) = v_\varphi / r\omega$, $H(\zeta) = v_z / \sqrt{\nu\omega}$, $\theta(\zeta) = T / r^n$, $\zeta = z \sqrt{\omega/\nu}$.

Решение уравнения (19) методом последовательных приближений дает для коэффициента $Nu / \sqrt{Re} = -\theta'(0)$ значения — 0,02; 0,399; 0,52; 0,616; 0,67 соответственно для $n = -2$; 0; 1; 2; 3. Формула (17) дает достаточно близкие значения 0; 0,436; 0,547; 0,616; 0,688, что свидетельствует об эффективности приближенного метода.

Очевидно, что при произвольном градиенте температур влияние обдува будет также выражаться формулой (6).

Поступило
23 V 1957

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ A. N. Tifford, Scheng To Chu, Proc. Second US Nat. Congr. Appl. Mech., 1955, p. 793. ² W. G. Cochran, Proc. Cambr. Phil. Soc., 30, 365 (1934). ³ Л. А. Дорфман, Изв. АН СССР, ОТН, № 7 (1957). ⁴ E. Truckenbrodt, Zs. ang. Math. u. Mech., 34, № 4/5, 150 (1954). ⁵ Л. Г. Лойцянский, Механика жидкости и газа, 1950.

Член-корреспондент АН СССР Л. Н. СРЕНСКИЙ

К ТЕОРИИ ГАЗОВЫХ СТРУЙ

1°. Уравнение С. А. Чаплыгина для определения функции тока $\psi(\theta, \tau)$ установившегося течения газа:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left\{ \frac{2\tau}{(1-\tau)^\beta} \frac{\partial \psi}{\partial \tau} \right\} + \frac{1-(2\beta+1)\tau}{2\tau(1-\tau)^{\beta+1}} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = 0 \quad (1)$$

обладает, помимо тех частных решений, которые были указаны и использованы С. А. Чаплыгиным, еще одним семейством частных решений, позволяющим решить ряд новых задач о струйном движении газа.

Это семейство состоит из функций, являющихся произведением функции $\Theta(\theta)$ на функцию $T(\tau)$, причем эти функции представляют собою интегралы дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} - n^2 \Theta &= 0, \\ \frac{d}{d\tau} \left\{ \frac{2\tau}{(1-\tau)^\beta} \frac{dT}{d\tau} \right\} + n^2 \frac{1-(2\beta+1)\tau}{2\tau(1-\tau)^{\beta+1}} T &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

в которых n есть произвольное постоянное число. Два линейно независимых частных решения уравнения (2) могут быть представлены в следующем виде:

$$\begin{aligned} T'_n &= M(\tau, n) \cos \left(\frac{1}{2} n \ln \frac{\tau_2}{\tau} \right) - N(\tau, n) \sin \left(\frac{1}{2} n \ln \frac{\tau_2}{\tau} \right), \\ T''_n &= M(\tau, n) \sin \left(\frac{1}{2} n \ln \frac{\tau_2}{\tau} \right) + N(\tau, n) \cos \left(\frac{1}{2} n \ln \frac{\tau_2}{\tau} \right), \end{aligned} \quad (3)$$

где τ_2 — какое-нибудь число, а функции M и N определяются рядами:

$$\begin{aligned} M(\tau, n) &= 1 + \frac{\beta}{2} \frac{n^2(1-\frac{1}{2}\beta n^2)}{n^2+4} \tau^2 + \dots, \\ N(\tau, n) &= \left[-\frac{1}{2} \beta \tau - \frac{1}{2} \beta \frac{(1+\frac{1}{2}\beta)n^2-2(\beta+1)}{n^2+4} \tau^2 + \dots \right] n. \end{aligned} \quad (4)$$

Отметим, что при решении простейшей задачи Штурма — Лиувилля для уравнения (3) с условиями $T=0$ для двух значений τ , меньших, чем $\frac{1}{2\beta+1}$, соответствующее фундаментальное число $\lambda = n^2$ всегда будет положительным.

Преобразуем уравнение (3) к новым переменным z и $u(z)$, полагая

$$z = \int_{\tau}^{\tau_2} \frac{d\tau}{2\tau} \sqrt{\frac{1-(2\beta+1)\tau}{1-\tau}}; \quad u(z) = T(\tau) \sqrt[4]{\frac{1-(2\beta+1)\tau}{(1-\tau)^{2\beta+1}}};$$

мы получим:

$$\frac{d^2 u}{dz^2} + \left[n^2 + \frac{\beta(2\beta+1)\tau^2}{1-\tau} - \frac{4-2(\beta+2)\tau-\beta(2\beta+1)\tau^2}{[1-(2\beta+1)\tau]^3} \right] u = 0. \quad (5)$$

Построим для этого дифференциального уравнения формулы обращения, отправляясь от частного его решения $\omega(z, \lambda)$, обращающегося в

нуль при $z = 0$ и рассматриваемого для всех положительных значений z от нуля до ∞ . В силу отмеченного выше свойства числа n^2 и сходимости интеграла

$$\int_0^{\infty} \frac{\beta(2\beta+1)\tau^2}{1-\tau} \frac{4-2(\beta+2)\tau-\beta(2\beta+1)\tau^2}{[1-(2\beta+1)\tau]^3} dz$$

уравнение (5) имеет непрерывный спектр, расположенный на положительной части оси λ (1).

Указанные формулы обращения, которые строятся с использованием разложений (3) и (4), имеют вид

$$F(\lambda) = \int_0^{\infty} f(x) \omega(x, \lambda) dx, \quad f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \omega(x, \lambda) F(\lambda) d\rho(\lambda),$$

где

$$\begin{aligned} \omega(x, \lambda) &= \frac{4\tau_2^2}{V\bar{\lambda}} \sqrt[4]{\frac{1-(2\beta+1)\tau}{[1-(2\beta+1)\tau_2]^3} \frac{(1-\tau_2)^{3-2\beta}}{(1-\tau)^{2\beta+1}}} T(\tau, n); \\ \lambda &= n^2; \quad T(\tau, n) = T'_n(\tau_2) T''_n(\tau) - T''_n(\tau_2) T'_n(\tau); \\ d\rho(\lambda) &= \frac{1}{16\pi\tau_2^4} \sqrt[4]{\frac{[1-(2\beta+1)\tau_2]^3}{(1-\tau_2)^{3-2\beta}} \frac{V\bar{\lambda} d\lambda}{M(\tau_2, n)^2 + N(\tau_2, n)^2}}. \end{aligned}$$

2°. Рассмотрим сосуд, ограниченный двумя параллельными стенками, уходящими в одну сторону в бесконечность, и снабженный насадком, состоящим из двух небольших и равных между собой прямолинейных отрезков, наклоненных к средней линии сосуда и отходящих от свободных концов указанных параллельных стенок (рис. 1). Из такого сосуда выходит под давлением газ в свободное пространство в виде струи. Наша задача состоит в построении функции тока этого течения газа.

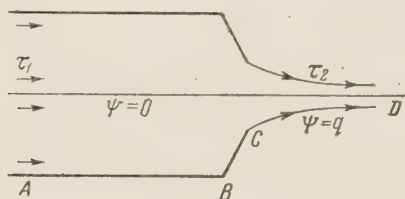


Рис. 1

Обозначим через τ_1 и τ_2 значения переменных Чаплыгина τ соответственно в удаленных местах сосуда и на струе.

Назовем далее через θ_0 угол наклона прямолинейных отрезков к средней линии сосуда; пусть q есть значение функции тока вдоль средней линии сосуда, если значение этой функции на линии $ABCD$ принято равным нулю.

Для построения функции тока рассматриваемого течения газа возьмем указанное в 1° решение уравнения Чаплыгина в виде

$$\psi = T_n(\tau) \frac{\operatorname{sh} n(\theta_0 - \theta)}{\operatorname{sh} n\theta_0}$$

и применим к нему формулы обращения. Мы получим тогда, после выполнения ряда действий, следующий результат:

$$\psi = \frac{2q}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\frac{2\tau}{(1-\tau)^\beta} \frac{dT}{d\tau} \right]_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{\operatorname{sh} n(\theta_0 - \theta)}{n^2 \operatorname{sh} n\theta_0} \frac{T(\tau, n) dn}{M(\tau_2, n)^2 + N(\tau_2, n)^2}.$$

С помощью таких же вычислений может быть решен и ряд других задач теории газовых струй, рассмотренных для несжимаемой жидкости Н. Е. Жуковским.

Поступило
29 I 1958

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ Б. М. Левитан, Разложение по собственным функциям дифференциальных уравнений второго порядка, гл. II, III, М.—Л., 1950.

А. М. ТЕР-КРИКОВ

НЕЛИНЕЙНАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ ПОДВОДНОГО КРЫЛА

(Представлено академиком А. А. Дородницыным 9 XII 1957)

1. Рассматривается установившееся движение подводного крыла (S) под поверхностью идеальной несжимаемой тяжелой жидкости конечной глубины. Предполагается, что далеко впереди жидкость покоится. Не ограничивая общности можно принять скорость тела и глубину жидкости на бесконечности равными единице. Движение можно обратить и рассматривать обтекание тела (S) потоком жидкости. Оси координат выбраны согласно рис. 1. Острая кромка крыла находится в точке $P(0, \beta)$. Пусть $y = Y(x)$ — уравнение свободной границы (L) жидкости; $y = 0$ — уравнение дна (T) ; D — область, заключенная между (L) , (S) и (T) ; $z = x + iy$ — комплексная координата точки; $w(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ — комплексный потенциал.

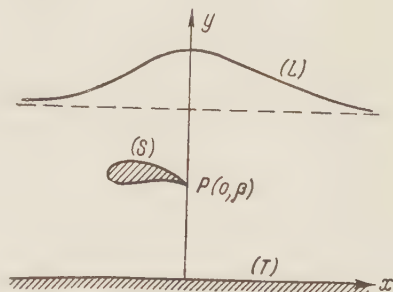


Рис. 1

Общая задача об обтекании крыла сводится к следующей математической задаче: найти функцию $w(z)$, аналитическую в D и удовлетворяющую условиям:

$$\frac{1}{2} \left| \frac{dw}{dz} \right|^2 + \nu y = \text{const} \quad \text{на } (L); \quad (1)$$

$$\psi = 1 \quad \text{на } (L); \quad (2)$$

$$\psi = 0 \quad \text{на } (T); \quad (3)$$

$$\psi = \psi_0 \quad \text{на } (S); \quad (4)$$

$$\int_{(C)} \frac{dw}{dz} dz = \gamma; \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} Y(x) = 1; \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{dw}{dz} = 1; \quad (7)$$

$$\left| \frac{dw}{dz} \right|_{z=i\beta} < \infty. \quad (8)$$

Здесь ν — заданное число, а γ и ψ_0 должны быть найдены в процессе решения; (C) — произвольный контур, охватывающий (S) и целиком лежащий в D .

2. Отобразим конформно криволинейную полосу, заключенную между (L) и (T) , на прямолинейную полосу $0 \leq \eta \leq 1$ при помощи некоторой

аналитической функции $\zeta = \zeta(z) = \xi(x, y) + i\eta(x, y)$ так, чтобы бесконечно удаленной точке плоскости z соответствовала бесконечно удаленная точка плоскости ζ . При этом контур (S) перейдет в некоторый искаженный контур (S') . Пусть при этом точке $z = i\beta$ соответствует точка $\zeta = i\varepsilon$. В плоскости параметрического переменного ζ для определения $\omega(\zeta)$ получаются граничные условия:

$$\begin{aligned} \psi = 0, \quad \eta = 0; \quad \psi = 1, \quad \eta = 1; \quad \psi = \psi_0 \quad \text{на } (S'); \\ \int_{(C)} \left(\frac{dw}{d\zeta} \right) d\zeta = \gamma; \quad \left| \left(\frac{dw}{d\zeta} \right)_{\zeta=i\varepsilon} \right| < \infty. \end{aligned} \quad (9)$$

Условия (9) определяют обтекание тела (S') в трубе $\eta = 0, \eta = 1$. Задача будет решаться «обратным методом». Его сущность заключена в следующем. Зададим форму крыла в параметрической плоскости. Тогда, решая задачу обтекания крыла (S') , мы найдем $\omega(\zeta)$. Если $\omega(\zeta)$ известно, то условия (1), (6), (7) и условие $y(\xi, 0) = 0$ позволяют найти зависимость между физической плоскостью z и параметрической плоскостью ζ . Вводится новая зависимая переменная

$$\tau(\zeta) = \theta + i\lambda = i \ln \frac{d\zeta}{dz}. \quad (10)$$

Задача сводится к нахождению функции $\tau(\zeta)$, аналитической в полосе $0 < \eta < 1$, по граничным и асимптотическим условиям:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \eta} - \nu \theta = F(\theta, \lambda), \quad \eta = 1; \quad \theta = 0; \quad \eta = 0; \quad \lim_{\xi \rightarrow -\infty} \tau(\zeta) = 0, \quad (11)$$

где

$$F(\theta, \lambda) = \frac{\nu}{\omega^2} e^{-3\lambda} \sin \theta - \nu \theta + \frac{d}{d\xi} \ln \omega(\xi), \quad \omega(\xi) = \left| \frac{dw}{d\zeta} \right|_{\eta=1}. \quad (12)$$

Поставленная задача решается для $\nu < 1$.

3. Рассмотрим следующую линейную задачу: найти функцию $\tau(\zeta)$, аналитическую в полосе $0 < \eta < 1$, по граничным условиям

$$\frac{\partial \theta}{\partial \eta} - \nu \theta = f(\xi), \quad \eta = 1; \quad \theta(\xi, 0) = 0, \quad \eta = 0, \quad (13)$$

где $f(\xi)$ — абсолютно интегрируемая функция.

Функция Грина для этой задачи имеет вид

$$H(\zeta, \zeta') = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin k(\zeta - \xi')}{k} \frac{k \operatorname{ch} k(1 - \eta) - \nu \operatorname{sh} k(1 - \eta)}{k \operatorname{ch} k - \nu \operatorname{sh} k} dk. \quad (14)$$

Решение задачи (13) выражается через $H(\zeta, \zeta')$ следующим образом ⁽¹⁾:

$$\tau(\zeta) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi') H(\zeta, \xi' + i) d\xi' + ic, \quad (15)$$

где c — произвольная действительная константа.

Если подставить в (15) $F(\theta, \lambda)$ вместо $f(\xi)$, положить $\zeta = \xi + i$ и отделить действительную и мнимую части, то получим систему двух нелинейных интегральных уравнений относительно θ и λ , к которым сводится задача, поставленная в предыдущем разделе.

Обозначим через H линейный оператор, ставящий в соответствие функции $f(x)$ функцию $\int_{-\infty}^{+\infty} H(x + i, \xi + i) f(\xi) d\xi$. Пусть a — действитель-

ное положительное число; B^a — множество непрерывных на прямой $-\infty < x < +\infty$ функций, для которых величины $e^{ax}|f(x)|$ и $e^{-ax}|f(x)|$ ограничены. Как известно, всякую непрерывную функцию можно представить в виде $f(x) = f^+(x) + f^-(x)$, где $f^-(x)$ — нечетная функция, а $f^+(x)$ — четная. Превратим B^a в функциональное пространство Банаха, введя норму

$$\|f(x)\|_{B^a} = \sup e^{ax} |f^-(x)| + \sup e^{ax} |f^+(x)|.$$

Свойства оператора H даются следующими теоремами:
 Теорема 1. Оператор $\operatorname{Re} H$ действует из B^δ в B^δ , а оператор $\operatorname{Im} H$ из B^δ в B_*^δ .

Здесь 2δ — абсолютная величина первого корня уравнения $k \operatorname{ch} k - \nu \operatorname{sh} k = 0$; B_*^δ — пространство непрерывных ограниченных функций на прямой $-\infty < x < +\infty$.

Пусть T^δ есть пространство пар функций $q(\theta, \lambda)$, причем $\theta \in B^\delta$, $\lambda \in B_*^\delta$ и

$$\|q\|_{T^\delta} = \|\theta\|_{B^\delta} + \|\lambda\|_{B_*^\delta}.$$

Обозначим через F нелинейный оператор, ставящий в соответствие элементу $q \in T^\delta$ функцию

$$F(\theta, \lambda) = \frac{\nu}{\omega^2} e^{-3\lambda} \sin \theta - \nu \theta + \frac{d}{d\xi} \ln \omega(\xi).$$

Известно, что потенциал при обтекании профиля в трубе ведет себя на бесконечности как потенциал источника. Поэтому $\omega(\xi) = 1 + g(\xi)$, где $g(\xi) \in B^{\pi/2}$ и $dg(\xi)/d\xi \in B^{\pi/2}$, и, так как $\delta < \pi/2$, то $g(\xi)$ и $dg(\xi)/d\xi$ принадлежат B^δ .

Теорема 2. Оператор F действует из T^δ в B^δ .
 Обозначим через Ω пару операторов $\{\operatorname{Re} HF, \operatorname{Im} HF\}$.

Теорема 3. Оператор Ω действует из T^δ в T^δ .
 Задача свелась к интегральному уравнению $q = \Omega q$.

Пусть $\varepsilon = \max\{\|g(\xi)\|, \|dg/d\xi\|\}$.

Теорема 4. Для любого $\nu < 1$ можно подобрать такое ε_0 , что если $\varepsilon < \varepsilon_0$, то оператор Ω отображает некоторый шар M в пространстве T^δ в себя.

Теорема 5. Если ε достаточно мало, то оператор Ω дает сжатое отображение в M .

Теоремы 4 и 5 доказывают существование и единственность решения интегрального уравнения $q = \Omega q$ для малых ε .

Полученные результаты можно резюмировать следующим образом:

Теорема 6. Если задавать контур крыла в параметрической плоскости, то при числе Фруда, большем единицы, существует единственное решение задачи обтекания подводного крыла, переходящее в плоскопараллельный поток при $\varepsilon \rightarrow 0$.

В первом приближении контуры (S) и (S') совпадают. Если $\max|\lambda| < \ln 2$, то соответствие между физической и параметрической плоскостями будет взаимно-однозначным.

Поступило
 28 XI 1957

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ А. М. Т е р - К р и к о р о в. Изв. АН СССР, сер. матем., 22, № 2 (1958).

Ю. А. АМЕНЗАДЕ

МЕСТНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ ПРИ КРУЧЕНИИ КРУГЛОГО ПРИЗМАТИЧЕСКОГО БРУСА С ЭЛЛИПТИЧЕСКИМ НЕСООСНЫМ ОТВЕРСТИЕМ

(Представлено академиком Н. И. Мусхелишвили 25 XII 1957).

Рассмотрим задачу чистого кручения круглого призматического бруса, ослабленного в продольном направлении эллиптической полостью; при этом ось эллиптической полости расположена на некотором расстоянии от оси сплошного бруса (рис. 1).

Для определения напряженного состояния при чистом кручении следует найти комплексную функцию, регулярную в области S и удовлетворяющую граничным условиям ⁽¹⁾

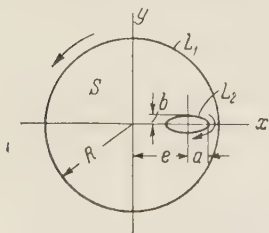


Рис. 1

$$\varphi_1(t) + \overline{\varphi_1(t)} = 0 \quad \text{на } L_1; \quad (1)$$

$$\varphi_1(t) + \overline{\varphi_1(t)} = t\bar{t} + B \quad \text{на } L_2, \quad (2)$$

где t — аффикс точки окружности L_1 или L_2 ; B — некоторая вещественная постоянная.

Следуя методу Д. И. Шермана ⁽²⁾, возьмем новую регулярную всюду вне эллипса функцию

$$\varphi(z) = \varphi_1(z) - \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{\omega(t_1)}{t_1 - z} dt_1, \quad (3)$$

обращающуюся в нуль на бесконечности. Используя функцию

$$z - e = A \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right) \quad \left(A = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{2}, \quad \rho = \sqrt{\frac{a+b}{a-b}} \right) \quad (4)$$

конформно отображающую внешность эллипса на внешность окружности γ радиуса $\rho > 1$ и (3), после некоторых преобразований из (1), (2) получим

$$\begin{aligned} \varphi^*(\tau) + \overline{\varphi^*(\tau)} = & - \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \left(\frac{\tau^n}{\rho^n} + \frac{\rho^n}{\tau^n} \right) + A^2 \left(\frac{\tau^2}{\rho^2} + \frac{\rho^2}{\tau^2} \right) + \\ & + Ae \left(\rho + \frac{1}{\rho} \right) \left(\frac{\tau}{\rho} + \frac{\rho}{\tau} \right) + A^2 \left(\rho^2 + \frac{1}{\rho^2} \right) + e^2 + B - (\alpha_0 + \bar{\alpha}_0), \end{aligned} \quad (5)$$

где $\varphi^*(\zeta) = \varphi(z)$;

$$\begin{aligned} b_n = \frac{1}{\rho^n} \sum_{k=|n|}^{\infty} \left(\frac{A}{R-e} \right)^k C_k^{n+k} \alpha_k \quad (n = \pm 1, \pm 2, \dots); \\ b_0 = \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{A}{R-e} \right)^k C_k^k \alpha_k; \end{aligned} \quad (6)$$

кроме того ⁽³⁾,

$$b_{-n} = \rho^{2n} b_n.$$

Здесь

$$\alpha_k = \frac{(R-e)^k}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{\omega(t_1)}{(t_1 - e)^{k+1}} dt_1 \quad (k = 0, 1, \dots). \quad (7)$$

Функционал α_0 является, вообще говоря, комплексной величиной, остальные постоянные α_k ($k = 1, 2, \dots$) условимся считать вещественными. Ниже мы убедимся в справедливости этого допущения. Звездочка при сумме указывает, что индекс n принимает значения одинаковой четности со значениями, принимаемыми индексом k .

Принимая во внимание, что $\varphi^*(\zeta)$ регулярна во внешности круга радиуса ρ в плоскости ζ и обращается в нуль на бесконечности, из (5) найдем

$$\varphi^*(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \frac{\rho^n}{\zeta^n}; \quad B = -A^2 \left(\rho^2 + \frac{1}{\rho^2} \right) - e^2 + (\alpha_0 + \bar{\alpha}_0) + 2b_0. \quad (8)$$

Здесь

$$\lambda_n = -(1 + \rho^{2n}) b_n + A^2 \mathcal{G}_n^{(2)} + Ae \left(\rho + \frac{1}{\rho} \right) \mathcal{G}_n^{(1)}; \quad (9)$$

$$\mathcal{G}_n^{(1)} = \begin{cases} 1 & (n=1); \\ 0 & (n \neq 1), \end{cases} \quad \mathcal{G}_n^{(2)} = \begin{cases} 1 & (n=2); \\ 0 & (n \neq 2). \end{cases}$$

Используя функцию $\zeta = \frac{z-e + \sqrt{(z-e)^2 - 4A^2}}{2A}$, обратную функции (4), где перед радикалом взят знак плюс, так как при отображении бесконечно удаленная точка в плоскости ζ должна перейти в бесконечно удаленную же точку плоскости z и значение радикала берется положительным при положительном $z > e + 2A$, из (8) получим

$$\varphi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \left(\frac{\rho}{2A} \right)^n [(z-e) - \sqrt{(z-e)^2 - 4A^2}]^n. \quad (10)$$

На основании введенной на окружности L_1 вспомогательной мнимой функции $2\omega(t) = \varphi_1(t) - \overline{\varphi_1(t)}$ и функции (3) имеем

$$\omega(t) = \varphi(t) - \overline{\varphi(t)} + \alpha_0^*. \quad (11)$$

Здесь α_0^* — чисто мнимая постоянная, $\alpha_0^* = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \omega(t_1) \frac{dt_1}{t_1}$. Учитывая выра-

жение (7) и приняв обозначение

$$\beta_m = \frac{R^m}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{\omega(t)}{t^{m+1}} dt, \quad (12)$$

из (10), после некоторых преобразований и рассуждений, получим

$$\beta_m = \sum_{n=1}^m \rho^n \lambda_n J_{m,n}, \quad (13)$$

где $J_{m,n} = -\left(\frac{e}{R}\right)^m \sum_{\nu_1=n-1}^{N(m,n)} \left(\frac{A}{e}\right)^{\nu_1+1} C_{m-1}^{\nu_1} \left(C_{\nu_1}^{\frac{\nu_1-n+1}{2}} - C_{\nu_1}^{\frac{\nu_1-n-1}{2}} \right)$, причем $N(m,n) = m-1$, если m и n одинаковой четности и $N(m,n) = m-2$, если m и n различной четности.

В силу (12) β_{k_1} являются коэффициентами разложения функции $\omega(t)$ в ряд Фурье, поэтому для нее имеем

$$\omega(t) = \beta_0 + \sum_{k_1=1}^{\infty} \beta_{k_1} \left[\left(\frac{t}{R} \right)^{k_1} - \left(\frac{R}{t} \right)^{k_1} \right]. \quad (14)$$

Подставляя выражение функции $\omega(t)$ в формулу (7), получим

$$\alpha_k = \left(\frac{R}{e} - 1 \right)^k \sum_{k_1=k}^{\infty} (-1)^{k_1-k} C_{k-1}^{k_1-k} \left(\frac{e}{R} \right)^{k_1} \beta_{k_1} \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \quad (15)$$

На основании формул (6), (15) из (9) после перестановки порядка суммирования будем иметь

$$\lambda_n = \frac{1}{\rho^n} \sum_{k_1=n}^{\infty} \mu_{k_1, n} \beta_{k_1} + A^2 \mathcal{C}_n^{(2)} + Ae \left(\rho + \frac{1}{\rho} \right) \mathcal{C}_n^{(1)}. \quad (16)$$

Из формул (16) и (13) после перестановки порядка суммирования окончательно получим

$$\sum_{k_1=1}^{\infty} q_{k_1, m} \beta_{k_1} = f_m \quad (m = 1, 2, \dots); \quad (17)$$

здесь $q_{m, m} = 1 - \sum_{n=1}^m J_{m, n} \mu_{m, n}$, $q_{k_1, m} = - \sum_{n=1}^{E(k_1, m)} J_{m, n} \mu_{k_1, n}$, $f_m = Ae(1 + \rho^2) J_{m, 1} + A^2 \rho^2 J_{m, 2}$, причем $E(k_1, m) = k_1$, если $k_1 \leq m$, и $E(k_1, m) = m$, если $k_1 > m$.

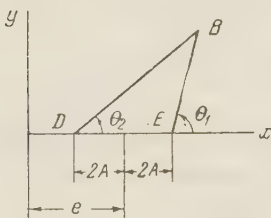


Рис. 2

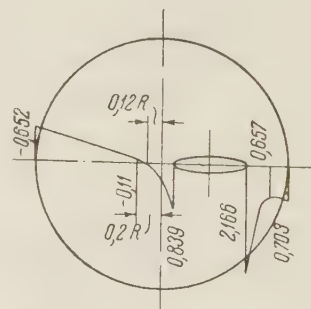


Рис. 3

Из системы уравнений (17) для $a/b = 5$; $e/k = 0,375$ и $A/e = 4/25 \sqrt{e}$ методом последовательных приближений решены 10 первых уравнений, причем понадобилось найти лишь 4 приближения, чтобы прийти к весьма точному решению (см. табл. 1).

Таблица 1

k_1	$-\frac{1}{A^2} \beta_{k_1}$	k_1	$-\frac{1}{A^2} \beta_{k_1}$
1	1,0165347	6	$0,2634644 \cdot 10^{-1}$
2	0,4147684	7	$0,1460082 \cdot 10^{-1}$
3	0,1901036	8	$0,8264082 \cdot 10^{-2}$
4	$0,939431 \cdot 10^{-1}$	9	$0,4756865 \cdot 10^{-2}$
5	$0,488524 \cdot 10^{-1}$	10	$0,2775966 \cdot 10^{-2}$

Таблица 2

z	δ/A^2	z	$\Delta, \%$
R	$0,411221 \cdot 10^{-2}$	$e + a$	$0,4 \cdot 10^{-3}$
iR	$0,1469 \cdot 10^{-2}$	$e + ib$	$0,2 \cdot 10^{-3}$
$-R$	$0,20562 \cdot 10^{-2}$	$e - a$	$0,3 \cdot 10^{-3}$

На основании (3), (10) и (14) в области S получим

$$\varphi_1(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \lambda_k \left(\frac{\rho}{2A} \right)^k [z - e - \sqrt{(z - e)^2 - 4A^2}]^k + \beta_k \left(\frac{z}{R} \right)^k \right\} + \beta_0. \quad (18)$$

Учитывая, что критические точки определяются аффиксами $z_{1,2} = e \pm 2A$ выражению (18) в любой точке рассматриваемой области придадим еще

вид (см. рис. 2)

$$\varphi_1(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \lambda_k \left(\frac{\rho}{2A} \right)^k \left[z - e - \sqrt{BE \cdot BD} e^{i \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}} \right]^k + \beta_k \left(\frac{z}{R} \right)^k \right\} + \beta_0,$$

где

$$BE = \sqrt{|z|^2 - (e + 2A)(z + \bar{z}) + (e + 2A)^2}, \quad \cos \theta_1 = \frac{z + \bar{z} - 2(e + 2A)}{2BE},$$

$$BD = \sqrt{|z|^2 - (e - 2A)(z + \bar{z}) + (e - 2A)^2}, \quad \cos \theta_2 = \frac{z + \bar{z} - 2(e - 2A)}{2BD}.$$

Величины $\delta = \varphi_1 + \bar{\varphi}_1$ на L_1 , $\Delta = \frac{\varphi_1 + \bar{\varphi}_1 - t\bar{t} - B}{t\bar{t} + B} 100\%$ на L_2 (для раз-
 бираемого примера $B = -9,6468014 A^2$), характеризующие степень точ-
 ности, с которой найденная функция $\varphi_1(z)$ удовлетворяет граничным условиям в
 характерных точках, приведены в табл. 2. Из таблицы видно, что в точках эллипса
 граничное условие выполняется точно, а в точках окружности достаточно точно.

Жесткость при кручении определится по формуле

$$D = \mu (I + D_0), \tag{19}$$

где μ — модуль упругости при сдвиге; I — полярный момент инерции площади сечения бруса:

$$I = \pi \left[\frac{R^4}{2} - ab \left(\frac{a^2 + b^2}{4} + e^2 \right) \right], \quad D_0 = -\frac{i}{4} \sum_{k=1}^2 \int_{L_k} [\varphi_1(t) - \overline{\varphi_1(\bar{t})}] dt\bar{t}. \tag{20}$$

Из формулы (19) на основании формул (20) получим

$$D = \pi \mu \left\{ \frac{R^4}{2} - ab \left(\frac{a^2 + b^2}{4} + e^2 \right) - A \left(2A\lambda_2 + \left(\rho + \frac{1}{\rho} \right) \lambda_1 e + \right. \right.$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \left(\frac{e}{R} \right)^{\nu} \left[\frac{2A}{\rho^2} \sum_{\nu=0}^{Q_1(k)} \left(\frac{A}{e} \right)^{\nu} C_k^{\nu} (C_{\nu}^{\frac{\nu+2}{2}} - \rho^4 C_{\nu}^{\frac{\nu-2}{2}}) + \right.$$

$$\left. \left. + e \left(1 + \frac{1}{\rho^2} \right) \sum_{\nu=1}^{Q_2(k)} \left(\frac{A}{e} \right)^{\nu} C_k^{\nu} (C_{\nu}^{\frac{\nu+1}{2}} - \rho^2 C_{\nu}^{\frac{\nu-1}{2}}) \right] \right\}.$$

Здесь $Q_1(k) = k$, если k четное; $Q_1(k) = k - 1$, если k нечетное
 $Q_2(k) = k - 1$, если k четное; $Q_2(k) = k$, если k нечетное.

Для рассматриваемого примера ($a/R = 0,3$, $b/R = 0,06$) $D = 1,5155 \mu R^4$.

Вычисленные значения напряжений в точках поперечного сечения,
 расположенных на оси x , приведены в табл. 3. Там же приведены зна-
 чения напряжений $Y_z^{(0)}$, когда сечение представляет собой круг без
 ослабления. Как видно из таблицы, в правой и левой вершинах эллипса
 напряжения Y_z соответственно в 5,04 и 17,6 раз больше напряжений
 $Y_z^{(0)}$ в тех же точках.

Эпюра касательных напряжений, действующих в точках оси x , изо-
 бражена на рис. 3.

Азербайджанский индустриальный институт
 им. М. Азизбекова

Поступило
 24 XII 1957

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ Н. И. Мусхелишвили, Некоторые основные задачи математической теории
 упругости, М., 1954. ² Д. И. Шерман, ДАН, 53, № 5 (1948). ³ Ю. А. Амен-заде,
 Инж. сборн., 21, 128 (1955).

В. А. СВЕКЛО и В. А. СЮКИЯЙНЕН

ДИФРАКЦИЯ ПЛОСКОЙ УПРУГОЙ ВОЛНЫ ОТНОСИТЕЛЬНО УГЛА

(Представлено академиком Л. И. Седовым 31 XII 1957)

Упругая среда заполняет плоскость с вырезанным углом раствора $\alpha < \pi$ (рис. 1). В момент $t = 0$ на острие угла O находит элементарная плоская продольная волна

$$\varphi = S^0 \left(t - \theta_0 x + \sqrt{\frac{1}{a^2} - \theta_0^2} y \right) \quad (1)$$

($S^0(\xi) = 1$ при $\xi > 0$; $S^0(\xi) = 0$ при $\xi < 0$; a — скорость распространения продольной волны, θ_0 — постоянная, определяющая направление падения волны) и вызывает дифракционное возмущение, которое к моменту t заполняет сектор $OABCO$ радиуса at раствора $2\pi - \alpha$ и описывается продольным φ и поперечным ψ потенциалами, являющимися однородными нулевыми измерениями функциями координат x, y, z .

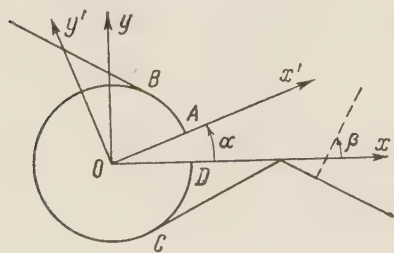


Рис. 1

Задача решается при условии, что на сторонах угла отсутствуют касательные напряжения и нормальные к границе составляющие вектора упругого перемещения, т. е.

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= 0, \quad v = 0 & \text{при } y = 0; \\ \tau_{x'y'} &= 0, \quad v' = 0 & \text{при } y' = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Механически эти условия соответствуют прилипанию без трения.

Нетрудно убедиться в том, что при указанных граничных условиях плоская продольная упругая волна, падая на границу, не вызывает отраженной плоской поперечной волны. Поэтому после столкновения падающей волны с острием вне упомянутого сектора будет иметь место только продольное возмущение. Отсюда естественно предположить, что и дифракционное возмущение внутри сектора $OABCO$ будет только продольным, т. е. считать $\psi \equiv 0$. Легко видеть, что при этом условии на каждой стороне угла одно из граничных условий оказывается следствием другого.

В самом деле, если $\psi \equiv 0$, то

$$\tau_{xy} = 2\mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad (3)$$

или

$$\tau_{xy} = 2\mu \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (4)$$

Если $v|_{y=0} = 0$, то и $\tau_{xy}|_{y=0} = 0$, что и требовалось. То же имеет место на стороне угла, где $y' = 0$.

Таким образом задача свелась к отысканию внутри сектора $OABCO$ продольного потенциала φ , удовлетворяющего волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \quad (5)$$

при условии, что на сторонах угла равна нулю нормальная производная от φ , а на участках окружности сектора $OABCO$ φ принимает известные постоянные значения.

Решение этой задачи в элементарных функциях было построено в работе (1). Если β — угол между осью Ox и направлением распространения плоской волны, то при указанном на рис. 1 расположении падающей плоской волны ($\beta \geq \alpha$, $\beta = \arccos \cos \alpha \theta_0$) получим

$$\varphi(x, y, t) = \operatorname{Re} \frac{1}{\pi i} \ln \frac{(e^{-\gamma_1 i} - z)(e^{-\gamma_2 i} - z)}{(e^{\gamma_1 i} - z)(e^{\gamma_2 i} - z)} + \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{\pi}, \quad (6)$$

где

$$z = (e^{-\alpha i} \zeta)^{\frac{\pi}{2\pi - \alpha}}, \quad \zeta = \left(\frac{at}{r} - \sqrt{\frac{a^2 t^2}{r^2} - 1} \right) e^{i\theta}; \quad (7)$$

θ — полярные координаты точек внутри сектора $OABCO$, $\gamma_1 = \pi \frac{\beta - \alpha}{2\pi - \alpha}$,

$$\gamma_2 = \pi - \frac{\pi\beta}{2\pi - \alpha}.$$

Перемещения и напряжения найдутся теперь по формулам

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad (8)$$

$$\tau_x = 2\mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \lambda \Delta \varphi, \quad \tau_y = 2\mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \lambda \Delta \varphi, \quad \tau_{xy} = 2\mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}$$

и могут быть подсчитаны в любой точке сектора для какого угодно момента времени с любой степенью точности.

Построенное решение (8) соответствует элементарной падающей разрывной волне (1), равной единице позади фронта и нулю впереди фронта, и вместе с этой последней определяет вне угла α обобщенное в смысле С. Л. Соболева решение уравнений движения. Оно дает нам возможность путем наложения построить при тех же краевых условиях решение более общей задачи дифракции, когда на стороны угла α падает продольная плоская волна φ вида

$$\varphi = f\left(t - \theta_0 x + \sqrt{\frac{1}{a^2} - \theta_0^2} y\right), \quad (9)$$

где функция f дифференцируема и $f(0) = 0$.

Петрозаводский государственный
университет

Поступило
7 VI 1957

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ С. Л. С о б о л е в, Тр. Сейсмолог. инст. АН СССР, № 41 (1934).

Л. А. ТОЛОКОННИКОВ

ПЛОСКАЯ ДЕФОРМАЦИЯ НЕСЖИМАЕМОГО МАТЕРИАЛА

(Представлено академиком Л. И. Седовым 25 XII 1957)

1. Положение точек тела в естественном состоянии определяется декартовыми координатами x_1, x_2, x_3 . Пусть вектор перемещения частицы имеет составляющие $u_1(x_1, x_2), u_2(x_1, x_2), u_3 = 0$. Тогда деформированное состояние окрестности точки можно определить ⁽¹⁾ составляющими тензора $((\epsilon_{ih}))$ и вектора $\vec{\omega}$, из которых лишь $\epsilon_{11}, \epsilon_{22}, \epsilon_{12}$ и ω_3 могут отличаться от нуля.

Если ϑ угол между первым из главных волокон в естественном состоянии и вектором $\vec{i}_1$; λ_1, λ_2 — удлинения главных волокон; ω — угол поворота окрестности точки как твердого тела, то

$$\begin{aligned} 2(1 + \epsilon_{11}) &= (\lambda_1 + \lambda_2) \cos \omega + (\lambda_1 - \lambda_2) \cos(2\vartheta + \omega), \\ 2(1 + \epsilon_{22}) &= (\lambda_1 + \lambda_2) \cos \omega - (\lambda_1 - \lambda_2) \cos(2\vartheta + \omega), \\ 2(\epsilon_{12} - \omega_3) &= -(\lambda_1 + \lambda_2) \sin \omega + (\lambda_1 - \lambda_2) \sin(2\vartheta + \omega), \\ 2(\epsilon_{12} + \omega_3) &= (\lambda_1 + \lambda_2) \sin \omega + (\lambda_1 - \lambda_2) \sin(2\vartheta + \omega). \end{aligned} \quad (1)$$

Отсюда, между прочим, следует

$$2\omega_3 = (\lambda_1 + \lambda_2) \sin \omega.$$

Рассматривая деформацию несжимаемого материала, положим

$$\lambda_1 = 1 + \eta, \quad \lambda_2 = (1 + \eta)^{-1}, \quad \lambda_3 = 1,$$

$$\ln \lambda_k = \sqrt{2} \epsilon_i \cos \beta_k, \quad \beta_1 = \beta, \quad \beta_2 = \beta + 2/3\pi, \quad \beta_3 = \beta - 2/3\pi,$$

откуда следуют выражения фазы и интенсивности деформации:

$$\beta = 1/6\pi, \quad \sqrt{1,5} \epsilon_i = \ln(1 + \eta) = 1/2 \epsilon. \quad (2)$$

Условия совместности перемещений сводятся к системе:

$$\begin{aligned} 2(\vartheta + \omega)_{,1} &= 2 \operatorname{ch} \vartheta_{,1} - (\operatorname{ch} \vartheta)_{,2} + (\sin 2\vartheta \operatorname{sh} \vartheta)_{,1} - (\cos 2\vartheta \operatorname{sh} \vartheta)_{,2}, \\ 2(\vartheta + \omega)_{,2} &= 2 \operatorname{ch} \vartheta_{,2} + (\operatorname{ch} \vartheta)_{,1} - (\sin 2\vartheta \operatorname{sh} \vartheta)_{,2} - (\cos 2\vartheta \operatorname{sh} \vartheta)_{,1}, \end{aligned} \quad (3)$$

а условием совместности вращений элементов тела оказывается уравнение

$$\begin{aligned} (\cos 2\vartheta \operatorname{sh} \vartheta)_{,22} - (\cos 2\vartheta \operatorname{sh} \vartheta)_{,11} - 2(\sin 2\vartheta \operatorname{sh} \vartheta)_{,12} + \\ + \nabla^2 \operatorname{ch} \vartheta + 2\vartheta_{,2} (\operatorname{ch} \vartheta)_{,1} - 2\vartheta_{,1} (\operatorname{ch} \vartheta)_{,2} = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

где через ∇^2 обозначен оператор Лапласа.

2. Нелинейные уравнения равновесия записываются в обобщенных напряжениях ⁽²⁾, которые выражаются через гидростатическое σ и октаэдрическое касательное τ напряжения. Полагая тело изотропным, главные направления напряжений и деформаций совпадающими, фазы истинных напряжений логарифмических удлинений одинаковыми, а интенсивность деформаций известной из опытов однозначной функцией только октаэдрического

эдрического касательного напряжения, удовлетворим уравнениям равновесия при отсутствии массовых сил введением функции напряжений U :

$$\frac{\sigma}{\sqrt{1,5}} + \tau \cos 2\theta - f = pU_{,22}, \quad \frac{\sigma}{\sqrt{1,5}} - \tau \cos 2\theta - f = pU_{,11},$$

$$\tau \sin 2\theta = -pU_{,12}, \quad f = 2\sqrt{1,5} \int_0^{\theta_i} \tau(\theta_i) d\theta_i, \quad (5)$$

где p — характерное напряжение.

Полагая $V = \tau^{-1} \operatorname{sh} \vartheta$, на основании (5) и (4) получаем разрешающее задачу уравнение

$$\begin{aligned} \nabla^4 U + \frac{1}{p} \frac{d\vartheta}{d\tau} \nabla^2 \tau^2 + \frac{1}{2\tau V} \frac{dV}{d\tau} [(\tau_{,11}^2 - \tau_{,22}^2)(U_{,11} - U_{,22}) + 4\tau_{,12}^2 U_{,12}] + \\ + \frac{1}{2\tau V} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{V}{p} \frac{d\vartheta}{d\tau} \right) [(\tau_{,1}^2)^2 + (\tau_{,2}^2)^2] + p \frac{d\vartheta}{d\tau} [U_{,122}(U_{,111} - U_{,122}) + \\ + U_{,112}(U_{,222} - U_{,211})] + \frac{1}{\tau V} \frac{dV}{d\tau} (\tau_{,1}^2 \nabla^2 U_{,1} + \tau_{,2}^2 \nabla^2 U_{,2}) + \\ + \frac{1}{4\tau V} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{1}{\tau} \frac{dV}{d\tau} \right) \{[(\tau_{,1}^2)^2 - (\tau_{,2}^2)^2](U_{,11} - U_{,22}) + 4\tau_{,1}^2 \tau_{,2}^2 U_{,12}\} = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

При переходе к соотношениям классической теории упругости это уравнение сводится к бигармоническому.

3. Пусть на граничной площадке с нормалью $\vec{n}(\cos \alpha, \sin \alpha)$ в естественном состоянии заданы истинное нормальное $p\sigma_n$ и касательное $p\tau_n$ напряжения. Поскольку

$$\begin{aligned} p\lambda_\tau^2 \sigma_n = \lambda_\tau^2 \sigma - \sqrt{1,5} \tau [\operatorname{sh} \vartheta - \operatorname{ch} \vartheta \cos 2(\alpha - \theta)], \\ p\lambda_\tau^2 \tau_n = -\sqrt{1,5} \tau \sin 2(\alpha - \theta), \quad \lambda_\tau^2 = \operatorname{ch} \vartheta - \operatorname{sh} \vartheta \cos 2(\alpha - \theta), \end{aligned}$$

на основании (5) находим граничные условия

$$\frac{dU_{,1}}{ds} = A \cos \alpha - B \sin \alpha, \quad \frac{dU_{,2}}{ds} = A \sin \alpha + B \cos \alpha, \quad (7)$$

где s — длина дуги граничного контура Γ в естественном состоянии,

$$\begin{aligned} A = -\frac{1}{\sqrt{1,5}} \lambda_\tau^2 \Big|_\Gamma \tau_n, \\ B = -\frac{1}{p} \bar{f} \Big|_\Gamma + \frac{1}{\operatorname{ch} \vartheta} \left\{ \frac{\lambda_\tau^2 \sigma_n}{\sqrt{1,5}} + \frac{V\tau^2}{p} + \right. \\ \left. + pV \left(\frac{1}{2} \nabla^2 U + \frac{\bar{f}}{p} \right) \left[\frac{1}{2} \cos 2\alpha (U_{,22} - U_{,11}) - \sin 2\alpha U_{,12} \right] \right\} \Big|_\Gamma. \end{aligned} \quad (8)$$

4. При исследовании конечных деформаций цветных металлов можно считать

$$\tau = G \operatorname{th} \vartheta, \quad G = \text{const.} \quad (9)$$

Обозначим

$$\mu = \frac{p}{G}, \quad t = (U_{,12})^2 - \frac{1}{4} (U_{,22} - U_{,11})^2, \quad H = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 \vartheta} = 1 - \mu^2 t \quad (10)$$

и разрешающее уравнение представим в виде

$$\nabla^2 U + \sum_{k=1}^4 \mu^k L_k(U) = 0, \quad (11)$$

где L_k — нелинейные операторы степени $k + 1$, например:

$$L_1(U) = \nabla^2 t + U_{,122}(U_{,111} - U_{,122}) + U_{,112}(U_{,222} - U_{,112}). \quad (12)$$

Поскольку в этом случае

$$f = -G \ln H, \quad \frac{\sigma}{V_{1,5}} = f + \frac{1}{2} p \nabla^2 U,$$

легко найти:

$$A = -\frac{\tau_n}{V_{1,5}H}(1 - \mu K \sqrt{H}), \quad K = \frac{1}{2} \cos 2\alpha (U_{,22} - U_{,11}) - \sin 2\alpha U_{,12}, \quad (13)$$

$$B = \frac{\sigma_n}{V_{1,5}} + \mu \left(\frac{1}{\mu^2} \ln H + t \sqrt{H} \right) - \mu K \sqrt{H} \left(\frac{\sigma_n}{V_{1,5}} - \frac{1}{2} \nabla^2 U + \frac{1}{\mu} \ln H \right).$$

Структура уравнения (11) и граничных условий (7), (13) указывает на возможность представления решения задачи разложением по степеням малого параметра μ :

$$U = U^{(0)} + \mu U^{(1)} + \mu^2 U^{(2)} + \dots \quad (14)$$

Определение $U^{(0)}$ эквивалентно решению классической задачи (3), а вычисление каждого из последующих приближений сводится к решению задач типа

$$\nabla^4 U^{(1)} = -L_1(U^{(0)}),$$

$$\left. \frac{dU_{,1}^{(1)}}{ds} \right|_{\Gamma} = f_1(U^{(0)}), \quad \frac{dU_{,2}^{(1)}}{ds} = f_2(U^{(0)}), \quad (15)$$

поэтому для решения конкретных задач можно с успехом применять методы, развитые Н. И. Мусхелишвили.

В отличие от известных (4) способов постановки и решения плоских задач нелинейной теории упругости, здесь не ограничиваются величины деформаций и перемещений, поэтому имеет смысл вычисление любого приближения и анализ сходимости (14).

Поступило
11 XII 1957

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ В. В. Новожилов, Основы нелинейной теории упругости, Л.—М., 1948.
- ² Л. А. Толоконников, Прикл. матем. и мех., **21**, в. 5 (1957). ³ Н. И. Мусхелишвили, Некоторые основные задачи математической теории упругости, М.—Л., 1949.
- ⁴ J. E. Adkins, A. E. Green, G. C. Nicholas, Phil. Trans. Roy. Soc., A, **247**, № 929 (1954).

М. П. АВОТИНА, Е. П. ГРИГОРЬЕВ, А. В. ЗОЛОТАВИН
и Б. КРАЦИК

ИЗЛУЧЕНИЕ Tb^{160}

(Представлено академиком А. А. Лебедевым 13 IX 1957)

С помощью спектрометра с двойной фокусировкой на угол $\pi/2$ ⁽¹⁾ с отсчитывательной полушириной линии 0,5% измерялся сплошной спектр, спектр конверсионных электронов и спектр фотоэлектронов радиоактивного Tb^{160} . Последний получался путем облучения медленными нейтронами химически чистого (99,99%) окисла тербия Tb_2O_3 .

Сплошной спектр изучался с источником толщиной ~ 1 мг/см², который был изготовлен нанесением Tb_2O_3 на слюдяную подкладку толщиной $\sim 1,5$ мг/см². Для более надежного определения граничной энергии и относительной интенсивности самой жесткой компоненты был изготовлен таким же образом источник толщиной $\sim 4-5$ мг/см². Методом Кюри было проведено разложение спектра на компоненты. При этом предполагалось, что их форма фермиевская. Результаты измерений приведены в табл. 1. Ввиду сравнительно большой толщины источников спектр ниже 300 кэв может быть значительно искажен. Поэтому относительная интенсивность самой мягкой компоненты не определялась.

Конверсионный спектр измерялся с источниками толщиной от $\sim 0,03$ до $4-5$ мг/см². Тонкие источники готовились электролитическим высаждением Tb на алюминиевую подкладку толщиной 0,27 мг/см², толстые — нанесением Tb_2O_3 на слюдяную или алюминиевую подкладку толщиной $\sim 1,5$ мг/см². Было найдено 19 линий, принадлежащих 11 переходам в Dy^{160} . Результаты измерений приведены в табл. 2. Общий вид β -спектра изображен на рис. 1.

При изучении распада Ho^{160} , которое производилось на том же приборе, но с разрешающей способностью 0,3% ⁽²⁾, было найдено, что линии, принадлежащие переходам в Dy^{160} с энергиями 878 и 965 кэв, являются двойными. Эти два перехода исследовались и при распаде Tb^{160} , также с разрешающей способностью 0,3% (рис. 2).

Из рис. 2 видно, что линия, соответствующая переходу с энергией 877 кэв, либо одиночная, либо ее более мягкая компонента настолько слаба, что ее нельзя выделить на подъеме более жесткой компоненты. Верхняя граница интенсивности мягкой компоненты составляет 7% от более жесткой. Хотя линия, соответствующая переходам с энергиями 961 и 964 кэв, полностью не разделилась, по ее форме и полуширине отчетливо видно, что она состоит из двух компонент с указанными энергиями и относительными интенсивностями соответственно 1 и 2,1. Разложение этой линии было проведено по форме линии 877 кэв.

Таблица 1

Результаты измерений сплошного β -спектра Tb^{160}

Компоненты	$E_{гр}$, кэв	Относит. интенсив.
1	450 ± 50	—
2	562 ± 5	$100 \pm 2,5$
3	858 ± 5	64 ± 3
4	1710 ± 10	$0,8 \pm 0,2$

Таблица 2

Результаты измерений спектра конверсионных
электронов Tb^{160}

№№ п. п.	E_e , кэВ	Интер- прета- ция	$h\nu$, кэВ	Относительная интенсивность	K/L
1	$32,9 \pm 0,5$	K	$86,5 \pm 0,5$	4600 ± 500	$0,83 \pm 0,2$
2	$78,6 \pm 1,1$	L	$86,4 \pm 1,1$	5500 ± 500	
3	$85,3 \pm 1$	M	$86,6 \pm 1$	1550 ± 150	
4	$144,1 \pm 1$	K	$197,9 \pm 1$	222 ± 10	$3,65 \pm 0,5$
5	160 ± 2	K	214 ± 2	37 ± 4	
6	$189,9 \pm 1$	L	$197,7 \pm 1$	61 ± 5	
7	$243,0 \pm 1$	K	$296,8 \pm 1$	100 ± 5	$6,2 \pm 0,7$
8	$823,6 \pm 1$	K	$877,4 \pm 1$	$30,5 \pm 0,5$	
9	$869,6 \pm 1$	L	$877,5 \pm 1$	$4,9 \pm 0,5$	
10	878 ± 2	M	879 ± 2	$1,1 \pm 0,2$	$5,1 \pm 0,7$
11	$907,0 \pm 1$	K	$960,8 \pm 1$	$8,6 \pm 2$	
12	$910,2 \pm 1$	K	$964,0 \pm 1$	$18,2 \pm 2$	
13	$963,1 \pm 2^*$	$L + M$	$961 + 964$	$5,3 \pm 0,4$	6 ± 2
14	1058 ± 2	K	1112 ± 2	$0,7 \pm 0,2$	
15	1123 ± 2	K	1177 ± 2	$3,2 \pm 0,3$	
16	1147 ± 2	K	$12,01 \pm 2$	$0,56 \pm 0,07$	$1,7 \pm 0,6$
17	1171 ± 2	L	$11,79 \pm 2$	$0,44 \pm 0,10$	
18	1219 ± 2	K	1273 ± 2	$1,3 \pm 0,1$	
19	1264 ± 3	L	1272 ± 3	$0,7 \pm 0,2$	

* Линия сложная.

Источником для фото-опытов служил медный цилиндр длиной 36 мм с внутренним диаметром 0,3 мм и внешним диаметром 1,2 мм, который набивался порошком Tb_2O_3 . В качестве мишеней, из которых выбивались фото-

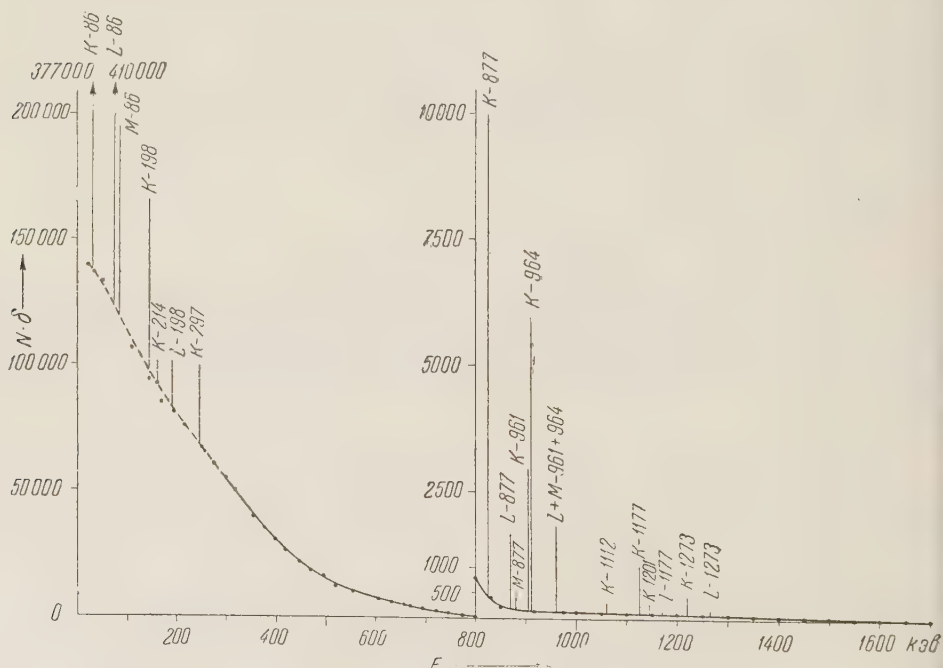


Рис. 1. β -спектр Tb^{160}

электроны, были использованы следующие вещества: Ag толщиной $0,25 \text{ мг/см}^2$, Bi $0,65$ и 3 мг/см^2 , Th 2 мг/см^2 и Au $7,7 \text{ мг/см}^2$. Всего было обнаружено 13 линий, принадлежащих 8 переходам в Dy^{160} . Результаты измерений приведены в табл. 3.

Относительные интенсивности γ -переходов были получены путем деления площадей линий на соответствующий коэффициент фотоэлектрического поглощения. Вводилась поправка на поглощение γ -лучей в самом источнике и в стенках цилиндра, а также на поглощение фотоэлектронов в мишени и в окнах счетчиков. Определение относительных интенсивностей γ -переходов таким способом обосновано следующим образом:

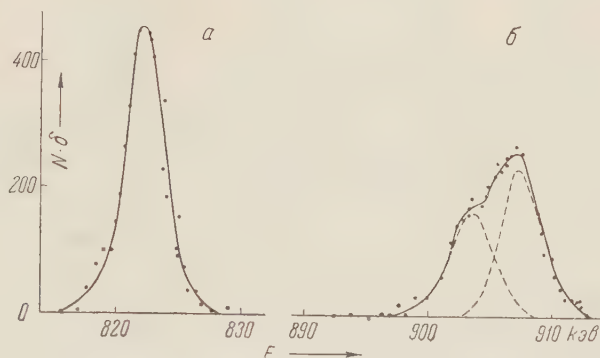


Рис. 2. Конверсионные линии K 877 кэв (а) и K 961+964 кэв (б). Приборная полуширина линий 0,3%

Сравнивались относительные интенсивности γ -переходов некоторых радиоактивных изотопов (например, J^{131} , Sb^{124}), известные из литературы, с интенсивностями, полученными нами на основе измерений фото-линий; использовались также каскадные линии в Co^{60} . В измерениях с источником с внутренним диаметром 1 мм оказалось, что выше 1 Мэв прибор передает интенсивности с относительно небольшой погрешностью, но в области меньших энергий отличие становится заметным. Так, для 600 кэв отличие достигает 20%, а в области 200 кэв 40%. Использование источника с внутренним диаметром 0,5 мм позволяет определять относительные интенсивности в более широкой области. В этой геометрии в области 600 кэв погрешность в определении относительных интенсивностей составляет несколько процентов.

В измерениях, которым посвящена настоящая работа, внутренний диаметр источника был 0,3 мм. Поэтому можно полагать, что относительные интенсивности будут передаваться правильно в более широком интервале энергий.

Поправка на поглощение для K - и L -линий 86,5 кэв составляет больше 50%. Ввиду большой погрешности относительная интенсивность и K/L для этого перехода не приводятся.

Была предпринята попытка разделить линию 967 кэв на ее две компоненты, применив мишень из Th толщиной 2 мг/см² и шириной 0,5 мм. Результаты измерений подтвердили наличие двух компонент, но из-за малой

Таблица 3

Усредненные результаты измерений спектра фотоэлектронов Tb^{160} с мишенями из Ag , Au , Bi и Th

№ п. п.	$h\nu$, кэв	Интерпретация	Относит. интенсивность γ -перехода	K/L фото-линий (мишень Au)
1	$86,2 \pm 0,3$	K	—	$5,6 \pm 2,3$
2	$86,8 \pm 0,3$	$L_I + L_{II}$	—	
3	$86,6 \pm 0,3$	L_{III}	—	
4	$196,8 \pm 1$	K	17 ± 4	
5	$297,8 \pm 1$	K	100 ± 20	$5,7 \pm 2$
6	295 ± 3	L	—	
7	878 ± 1	K	125 ± 20	
8	878 ± 3	L	—	
9	967 ± 1	K	162 ± 30	$5,1 \pm 1,1(K/L + M)$
10	1178 ± 2	K	71 ± 15	
11	1179 ± 3	$L + M$	—	
12	1201 ± 2	K	10 ± 2	
13	1273 ± 2	K	39 ± 8	

статистической точности и перекрытия с L -линией от перехода 878 кэв отношение их интенсивностей удалось определить лишь грубо (см. рис. 3):

$$I_{961}/I_{964} = 1 \pm 1,0 \\ - 0,5.$$

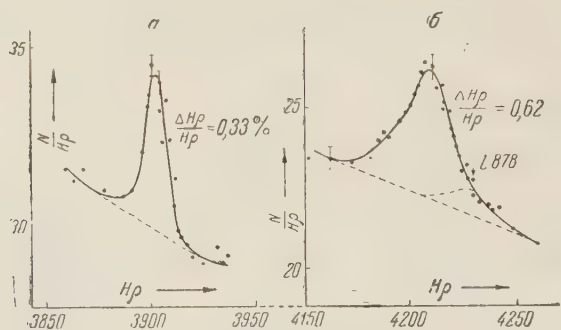


Рис. 3. Фото-пики переходов 878 кэв (а) и 967 кэв (б). Полуширина одиночной линии 0,33%, дублета 0,62%. Мишень Th 2 мг/см²

Отношения интенсивностей конверсионных линий и соответствующих им γ -переходов отличаются лишь численным множителем от коэффициента конверсии α_k . Этот множитель был получен сопоставлением отношения интенсивностей конверсионной линии и γ -перехода с энергией 197 кэв с теоретическим значением коэффициента конверсии этого перехода, так как в (2) было найдено, что он электрический квадруполь. Умножением на этот множитель были получены коэффициенты конверсии тех переходов, для которых имеются относительные интенсивности как конверсионных

Таблица 4

Экспериментальные и теоретические значения коэффициентов конверсии для некоторых переходов в Dy^{160}

Энергия перехода, кэв	α_k эксп	α_k теор	(K/L) эксп	(K/L) теор
86,3	—	—	$0,84 \pm 0,2$	$0,98(E2)$
197,3	—	$1,7 \cdot 10^{-1} (E2)$	$3,6 \pm 0,5$	$2,9 (E2)$
297,3	$(1,3 \pm 0,3) \cdot 10^{-2}$	$1,5 \cdot 10^{-2} (E1)$	—	—
878	$(3,2 \pm 0,5) \cdot 10^{-3}$	$3,4 \cdot 10^{-3} (E2)$	$6,2 \pm 0,7$	$6,5 (E2)$
961+964	$(2,2 \pm 0,4) \cdot 10^{-3}$	$2,8 \cdot 10^{-3} (E2)$	$5,1 \pm 0,7$	$6,7 (E2)$
1178	$(5,9 \pm 1,8) \cdot 10^{-4}$	$8,1 \cdot 10^{-4} (E1)$	$6,0 \pm 2,0$	$7,8 (E1)$
1201	$(7,3 \pm 2,4) \cdot 10^{-4}$	$7,8 \cdot 10^{-4} (E1)$	—	—
1273	$(4,2 \pm 1,2) \cdot 10^{-4}$	$6,9 \cdot 10^{-4} (E1)$	$1,7 \pm 0,6$	$7,7 (E1)$

линий, так и γ -переходов. Их значения приведены и сравнены с теоретическими в табл. 4.

Физический институт
Ленинградского государственного университета
им. А. А. Жданова

Поступило
10 IX 1957

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ А. В. Золотавин, Изв. АН СССР, сер. физ., 18, № 1 (1954). ² Е. П. Григорьев, Б. С. Желепов, А. В. Золотавин, Б. Крайчик, Б. К. Преображенский, И. С. Янчевская, ДАН, 117, № 1 (1957).

Ю. Ф. БЫДИН и А. М. БУХТЕЕВ

ИОНИЗАЦИЯ БЫСТРЫХ НЕЙТРАЛЬНЫХ АТОМОВ КАЛИЯ ПРИ СТОЛКНОВЕНИЯХ С АТОМАМИ АРГОНА И МОЛЕКУЛАМИ ВОДОРОДА, АЗОТА И КИСЛОРОДА

(Представлено академиком Л. А. Арцимовичем 24 I 1958)

В настоящее время проявляется большой интерес к изучению явлений атомных столкновений и, в частности, столкновений, «близких к медленным»⁽¹⁾. Одним из процессов такого типа является ионизация быстрых (в том смысле, что их скорости много больше тепловых) нейтральных атомов при столкновениях с атомами и молекулами газов. Исследование этого про-

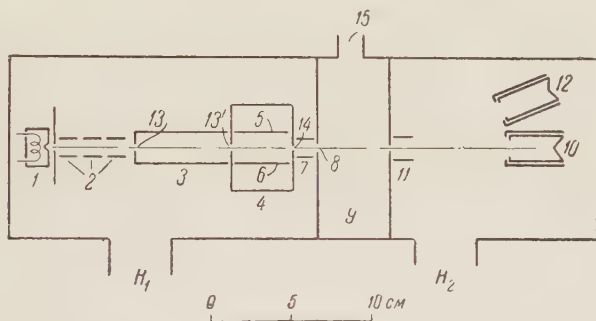


Рис. 1. Схема установки: 1 — термоионный источник; 2 — фокусирующая система; 3 — коллиматор; 4 — камера перезарядки; 5, 6 — электроды в камере перезарядки; 7 — отклоняющий конденсатор; 8 — круглое отверстие, $d = 4$ мм; 9 — камера столкновений; 10 — фарадеев цилиндр; 11 — конденсатор; 12 — боковой приемник; 13, 13' — щели $d = 0,8$ мм; 14 — круглое отверстие, $d = 2$ мм; 15 — трубка для впуска газа; H_1 и H_2 — патрубки к насосам

цесса представляет интерес не только для теории атомных столкновений, но, кроме того, может иметь значение для понимания возникновения ионизации при движении, например, метеоров в верхних слоях атмосферы.

Данная работа посвящена изучению ионизации быстрых атомов калия с энергиями от 100 до 2000 эв при столкновениях с атомами аргона и молекулами водорода, азота и кислорода. Потенциалы ионизации использованных газов значительно выше потенциала ионизации калия. Можно было поэтому ожидать, что в выбранной области энергий преобладающим процессом должна быть ионизация быстрых атомов калия по схеме:



Наблюдение эффекта производилось путем регистрации быстрых положительных ионов $\vec{K}^+$.

Схема нашей экспериментальной установки приведена на рис. 1. Пучок положительных ионов калия, полученный из термоионного источника 1,

фокусировался при помощи системы электродов 2, а затем коллимировался щелями 13 и 13'. Размеры всех отверстий для прохода частиц после коллиматора были подобраны с учетом естественной геометрической расходимости пучков. В камере 4 осуществлялась резонансная перезарядка с превращением положительных ионов калия в быстрые нейтральные атомы. Поток последних I_n измерялся путем измерения тока медленных положительных ионов, образовавшихся при перезарядке (2). При помощи конденсатора 7 положительные ионы, не испытывавшие перезарядки, отклонялись в сторону, а пучок нейтральных атомов попадал через диафрагму 8 в камеру столкновений 9.

Для наполнения камеры столкновений нами были использованы следующие газы: спектрально чистый аргон; водород, очищенный пропусканьем через накалившую палладиевую трубочку; технический азот, очищенный от примеси кислорода путем пропускания через накалинные медные стружки; кислород, полученный нагреванием марганцевокислого калия. Для измерения давления применялся ионизационный манометр. Остаточное давление при работающем источнике и нагретой камере 4 (с калием) составляло $5 \div 8 \cdot 10^{-6}$ мм рт. ст., а при очень длительной тренировке прибора могло быть снижено до $2 \div 3 \cdot 10^{-6}$ мм рт. ст. Рабочее давление газа в камере столкновений при измерении эффекта составляло $\sim 3 \div 5 \cdot 10^{-4}$ мм рт. ст. Перепад давлений между камерой 9 и остальной частью прибора был равен 1:15, а при работе с водородом $\sim 1:6$.

После предварительной проверки работы прибора мы помещали в камеру 4 калий и получали поток нейтральных атомов. В отсутствие газа в камере столкновений и при отклоненном вбок пучке первичных положительных ионов на приемник 12 можно было направить с помощью конденсатора 11 быстрые положительные ионы, которые образовывались, по видимому, в результате ионизации быстрых атомов в остаточном газе (или, что кажется менее вероятным, при попадании быстрых атомов на край диафрагм). К приемнику 12 был присоединен электрометрический усилитель с чувствительностью $2 \cdot 10^{-15}$ а/дел. При напуске газа в камеру 9 ток i на приемник 12 возрастал с увеличением давления p и при работе с молекулярными газами значительно превосходил «фон» (в случае жидкого аргона «фон» мог составлять около 10% от эффекта). Ток i измерялся тогда в камере перезарядки 4 отсутствовало поперечное электрическое поле, т. е. не одновременно с I_n . Отношение i/I_n линейно зависело от p и не зависело от I_n при изменении I_n в интервале использованных нами токов. В связи с этим столкновения в условиях наших опытов можно было считать однократными. Поскольку отношение i/I_n не превосходило 4%, мы пользовались для определения эффективных сечений упрощенной формулой:

$$Q = \frac{i}{I_n + i} \frac{1}{3,31 \cdot 10^{16} p x}, \quad (2)$$

где x — длина пути быстрых атомов в газе.

Средняя случайная относительная ошибка в определении Q была несколько больше для измерений в аргоне (из-за заметного фона) и в кислороде (ввиду невозможности измерения его давления ионизационным манометром), но и в этих случаях она составляла около $\pm 10\%$. Мы могли допускать некоторые систематические ошибки (разные для разных газов) в связи с тем, что измерение потока быстрых атомов производилось в начале их пути, а наша установка не была приспособлена для учета рассеяния нейтральных атомов на большие углы при ионизации. Имея в виду малую вероятность рассеяния ионов на большие углы, можно предположить, что этот эффект не играл большой роли в условиях наших опытов.

Результаты измерений приведены на рис. 2, где представлены эффективные сечения Q в зависимости от энергии T и скорости v быстрых атомов.

В интервале энергий от 100 до 2000 эв эффективные сечения ионизации быстрых атомов калия имеют величину 10^{-15} — 10^{-17} см² и растут при увеличении T . Величина эффекта возрастает при переходе от аргона к молекулярным газам, а среди последних при переходе от водорода к более тяжелым газам. Кривые для эффекта в аргоне, водороде и азоте имеют экспериментальные

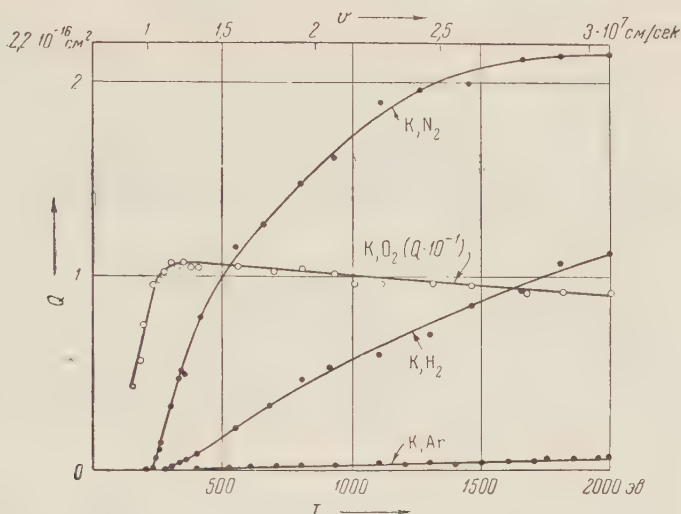


Рис. 2. Эффективные сечения Q для процесса ионизации быстрых атомов калия в зависимости от их энергии T и скорости v

пороги, ниже которых процесс ионизации не наблюдался при нашей чувствительности измерительной схемы. Согласно «адиабатической гипотезе» Мессе⁽¹⁾, сечения неупругих процессов должны быть малы при атомных столкновениях, которые близки к медленным. В связи с этим интересно отметить довольно большие величины сечений наблюдавшегося нами процесса ионизации быстрых атомов калия при сравнительно небольших энергиях последних.

В заключение мы хотим выразить глубокую благодарность проф. В. М. Дукельскому за предложение темы и ценные советы при выполнении работы.

Физико-технический институт
Академии наук СССР

Поступило
23 I 1958

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ H. S. W. Massey, E. H. S. Burhop, *Electronic and Ionic Impact Phenomena*, 1952, p. 514. ² Ю. Ф. Быдин, А. М. Бухтеев, *ЖТФ*, 28, в. 10 (1958).

В. М. КАМЕНКОВИЧ

О НЕКОТОРЫХ УПРОЩЕНИЯХ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ СТАЦИОНАРНЫХ ТЕЧЕНИЙ В БАРОКЛИННОМ МОРЕ

(Представлено академиком А. А. Дородницыным 23 XII 1957)

Рассматривается задача об установившихся течениях, возбуждаемых ветром, в глубоком, устойчиво стратифицированном море с отвесными берегами. Направим ось y на север, ось x — на восток, ось z — вертикально вниз. Предположим, что при отсутствии течений распределение плотности и давления по вертикали дается формулами:

$$\vartheta(z) = \rho_0(1 + \gamma z), \quad P(z) = p_a + \int_0^z g \vartheta(z) dz,$$

где ρ_0 , γ , p_a — постоянные величины.

Для описания этой задачи в динамике морских течений принимаются следующие уравнения:

$$-fv = -\frac{\partial p}{\partial x} + A_z \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + A_l \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right); \quad (1)$$

$$fu = -\frac{\partial p}{\partial y} + A_z \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + A_l \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right); \quad (2)$$

$$g\rho = \frac{\partial p}{\partial z}; \quad (3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0; \quad (4)$$

$$u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + w \left(\frac{\partial \rho}{\partial z} + \gamma \right) = A_z \frac{\partial^2 \rho}{\partial z^2} + A_l \left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial y^2} \right). \quad (5)$$

Здесь u , v , w — компоненты скорости по осям x , y , z соответственно; $\rho = \rho' / \rho_0$; $p = p' / \rho_0$, где ρ' и p' — отклонения плотности и давления от значений этих элементов в покоящемся море; f — параметр Кориолиса; g — ускорение силы тяжести; A_z и A_l — постоянные коэффициенты вертикального и горизонтального турбулентного обмена.

Граничные условия задачи следующие:
при $z = 0$:

$$A_z \frac{\partial u}{\partial z}(x, y, 0) = -T_x, \quad A_z \frac{\partial v}{\partial z}(x, y, 0) = -T_y, \quad \frac{\partial \rho}{\partial z} = 0; \quad (6)$$

$$w(x, y, 0) = 0; \quad (7)$$

$$p(x, y, 0) = -g\zeta(x, y); \quad (8)$$

при $z = \infty$:

$$u = v = w = p = \rho = 0. \quad (9)$$

Здесь $T_x = \frac{1}{\rho_0} T'_x$; $T_y = \frac{1}{\rho_0} T'_y$, где T'_x , T'_y — заданные касательные напряжения ветра; $\zeta(x, y)$ — уровень моря, определяемый из уравнения (8).

На вертикальных стенках $u = 0$, $v = 0$, $\partial\rho/\partial\nu = 0$, где ν — направление нормали к стенке.

Целью настоящей работы является упрощение уравнений (1) — (5) и граничных условий задачи путем оценки порядка величин, входящих в выражения (1) — (9), для движений с характерным горизонтальным масштабом $L = 1000$ км. Такое значение L принимается при рассмотрении океанических течений.

Выпишем определяющие параметры задачи (все приводимые ниже порядки указываются в системе CGS): $f = 10^{-4}$; $\beta = 10^{-13}$; $T = 1$; $\gamma = 10^{-7}$; $\rho = 10^3$; $A_z = 10^2$; $A_l = 10^9$; $L = 10^8$; β — широтное изменение параметра Кориолиса; T — характерное значение ветрового трения (T_x, T_y). Значение A_l вычислено с помощью формулы Ричардсона — Обухова: $A_l = kL^{4/3}$, где $k \approx 0,02$. Характерные значения для горизонтальной и вертикальной скорости, плотности и давления обозначим соответственно U, W, σ, Π .

Поле гидродинамических элементов в море мы разобьем на сумму двух компонент: дрейфовой компоненты ($u_d, v_d, \omega_d, p_d, \rho_d$) и градиентной компоненты ($u_g, v_g, \omega_g, p_g, \rho_g$), в формировании которых участвуют различные физические факторы. Компонента ($u_d, v_d, \omega_d, p_d, \rho_d$) является результатом непосредственного действия ветрового трения на водную поверхность. Для нее существенную роль играет вертикальное перемешивание. Глубина проникновения дрейфовой компоненты h имеет порядок 10 м — порядок «глубины трения».

Градиентная компонента ($u_g, v_g, \omega_g, p_g, \rho_g$) является вторичным результатом действия ветра и существенно связана с плотностной неоднородностью. Глубина проникновения этой компоненты H имеет порядок 1000 м — порядок толщины бароклинного слоя в море.

Порядки величин мы будем определять отдельно для дрейфовой и градиентной компоненты.

Начнем с дрейфовой компоненты. Поскольку $\partial u_d/\partial z \gg \partial u_g/\partial z$; $\partial v_d/\partial z \gg \partial v_g/\partial z$, то $U_d = Th/A_z$. В уравнениях (1) и (2) одинаковый порядок должны иметь сила Кориолиса и вертикальное трение. Считая, что в уравнении (5) $\gamma\omega_d$ и $A_z\partial^2\rho_d/\partial z^2$ одного порядка, а в уравнении (4) все члены одного порядка, имеем

$$U_d = \frac{Th}{A_z} = 10, \quad W_d = U_d \frac{h}{L} = 10^{-4}, \quad h = \sqrt{\frac{A_z}{f}} = 10^3,$$

$$\sigma_d = \frac{\gamma W_d h^2}{A_z} = 10^{-7}, \quad \Pi_d = gh\sigma_d = 10^{-1}, \quad \frac{\Pi_d}{L} = 10^{-9}.$$

Переходим к определению масштабов для градиентной компоненты. В этом случае в уравнениях (1) и (2) одинаковый порядок должны иметь сила Кориолиса и градиент давления. В уравнении (5) горизонтальная адвекция имеет одинаковый порядок с членом $\gamma\omega_g$. В силу условия (7) $W_g = W_d$. Мы имеем

$$U_g = \sqrt{\frac{\gamma g H T}{L f^2}} \approx 3, \quad \sigma_g = \sqrt{\frac{T \gamma L}{g H}} \approx 3 \cdot 10^{-4}, \quad \frac{\Pi_g}{L} = \sqrt{\frac{T g \gamma H}{L}} \approx 3 \cdot 10^{-4}.$$

Как показывает оценка, основную роль в выражении $\partial u_g/\partial x + \partial v_g/\partial y$ играет широтное изменение параметра Кориолиса β . Требуя, чтобы $\partial u_g/\partial x + \partial v_g/\partial y$ имело тот же порядок, что и $\partial\omega_g/\partial z$, мы находим H :

$$H = \left[\frac{f}{\beta} \sqrt{\frac{T}{L g \gamma}} \right]^{2/3}. \quad (10)$$

Формула (10) дает порядок толщины бароклинного слоя в море 10^5 см. Отметим, что если в уравнении (5) основными членами считать боковое перемешивание и $\gamma\omega_g$ или вертикальное перемешивание и $\gamma\omega_g$, то можно

таким же образом получить другие выражения для H , которые были получены в работах Линейкина ⁽¹⁾ и Стоммела и Верониса ⁽²⁾. Порядки H полученные по всем этим формулам, оказываются одинаковыми (при принятых значениях определяющих параметров).

Приведенные оценки показывают, что $U_{\Gamma} \approx U_{\Delta}$, $W_{\Gamma} \approx W_{\Delta}$, $\sigma_{\Gamma} \gg \sigma_{\Delta}$, $\Pi_{\Gamma} \gg \Pi_{\Delta}$. Поэтому имеем

$$u = u_{\Gamma} + u_{\Delta}, \quad v = v_{\Gamma} + v_{\Delta}, \quad w = w_{\Gamma} + w_{\Delta}, \quad p = p_{\Gamma}, \quad \rho = \rho_{\Gamma}. \quad (11)$$

Если исключить из рассмотрения узкую прибрежную полосу, то после проведения всех оценок мы приходим к следующим соотношениям:

$$-fv_{\Delta} = A_z \frac{\partial^2 u_{\Delta}}{\partial z^2}, \quad fu_{\Delta} = A_z \frac{\partial^2 v_{\Delta}}{\partial z^2}; \quad (12)$$

$$\frac{\partial u_{\Delta}}{\partial x} + \frac{\partial v_{\Delta}}{\partial y} + \frac{\partial w_{\Delta}}{\partial z} = 0; \quad (13)$$

$$\text{при } z = 0 \quad A_z \frac{\partial u_{\Delta}}{\partial z} = -T_x, \quad A_z \frac{\partial v_{\Delta}}{\partial z} = -T_y; \quad (14)$$

$$\text{при } z = \infty \quad u_{\Delta} = v_{\Delta} = w_{\Delta} = 0. \quad (15)$$

Отсюда легко находим

$$w_{\Delta}(x, y, 0) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{T_y}{f} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{T_x}{f} \right).$$

Для определения градиентной составляющей (задача о глубинной циркуляции) имеем:

$$-fv_{\Gamma} = -\frac{\partial p}{\partial x}, \quad fu_{\Gamma} = -\frac{\partial p}{\partial y}; \quad (16)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = g\rho; \quad (17)$$

$$\frac{\partial u_{\Gamma}}{\partial x} + \frac{\partial v_{\Gamma}}{\partial y} + \frac{\partial w_{\Gamma}}{\partial z} = 0; \quad (18)$$

$$u_{\Gamma} \frac{\partial \rho}{\partial x} + v_{\Gamma} \frac{\partial \rho}{\partial y} + w_{\Gamma} \frac{\partial \rho}{\partial z} = A_l \left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial y^2} \right). \quad (19)$$

Граничные условия задачи:

$$\text{при } z = 0 \quad w_{\Gamma} = -w_{\Delta} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{T_x}{f} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{T_y}{f} \right);$$

$$\text{при } z = \infty \quad u_{\Gamma} = v_{\Gamma} = w_{\Gamma} = p = \rho = 0;$$

на вертикальной стенке отсутствует нормальная производная плотности; плотность ρ считается известной на данной вертикали.

После решения уравнений (12) — (19) искомые величины u , v , w , p , ρ находятся по формулам (11).

Остановимся на анализе глубинной циркуляции. В этом случае оказывается, что все искомые функции u_{Γ} , v_{Γ} , w_{Γ} , p , ρ можно выразить через одну функцию $\psi(x, y, z)$ по формулам

$$u_{\Gamma} = -\frac{1}{f} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial z}, \quad v_{\Gamma} = \frac{1}{f} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z}, \quad w_{\Gamma} = \frac{\beta}{f^2} \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (20)$$

$$p = \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad \rho = \frac{1}{\beta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}.$$

Для определения ψ получается уравнение

$$\frac{1}{f} \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} \frac{\partial^3 \psi}{\partial z^2 \partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial z} \frac{\partial^3 \psi}{\partial z^2 \partial x} \right] + \frac{g\gamma\beta}{f^2} \frac{\partial \psi}{\partial x} = A_I \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \quad (21)$$

с граничными условиями:

$$\text{при } z = 0 \quad \frac{\beta}{f^2} \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{T_x}{f} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{T_y}{f} \right);$$

$\psi = 0$ при $z = \infty$ и $\partial\psi/\partial n = 0$ на вертикальных стенках; ψ задано на одной вертикали.

Решение уравнения (21) представляет большие математические трудности. По этой причине для получения хотя бы качественного представления о решении мы отбросим (как это обычно и делается в работах по морским течениям) нелинейные члены и рассмотрим уравнение

$$\frac{g\gamma\beta}{f^2} \frac{\partial \psi}{\partial x} = A_I \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \quad (22)$$

с теми же граничными условиями, что и для уравнения (21).

Решение этого уравнения легко находится в следующем частном случае. Рассмотрим канал, вытянутый в зональном направлении, ширины L . Пусть ветер задан в виде $T_y = 0$, $T_x = T_0 \sin \lambda x \left(1 + \cos \frac{2\pi y}{L} \right)$. Тогда решение уравнения (22) дается формулой:

$$\psi = \frac{2\pi T_0 f}{\lambda \beta L} e^{-qz} \cos(\lambda x + qz) \sin \frac{2\pi y}{L}, \quad (23)$$

где

$$q = \left\{ \frac{1}{2} \frac{g\gamma\beta\lambda}{A_I f^2 (\lambda^2 + 4\pi^2 / L^2)} \right\}^{1/2}.$$

Из формулы (23) видно, что для каждого z волна в направлении оси x смещается по фазе к западу, причем смещение растет с глубиной.

В работе (3) было дано точное решение уравнений (1) — (5) для канала при $L = 100$ км и без учета нелинейных членов. Это решение с достаточной степенью точности получается из уравнений (12) — (19), если в уравнениях (16) учесть боковое трение (так как П. С. Линейкин рассматривал в (3) случай $\beta = 0$). Естественно, что член $u_r \partial \rho / \partial x + v_r \partial \rho / \partial y$ должен быть выброшен из (19), так как он не учитывался в работе (3).

Институт океанологии
Академии наук СССР

Поступило
23 XII 1957

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ П. С. Линейкин, ДАН, 117, № 6 (1957). ² H. Stommel, G. Veronis, Tellus, 9, 3 (1957). ³ П. С. Линейкин, Основные вопросы динамической теории бароклинного слоя моря, 1957.

Академик В. В. ШУЛЕЙКИН

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ ПАРАМЕТРЫ ПОЛЯ ВЕТРОВЫХ ВОЛН В ОКЕАНЕ

Результаты новых измерений волн в океане, сопоставленные с результатами опытов в штормовом бассейне Академии наук СССР, позволяют охарактеризовать поле штормовых волн далеко за пределами начальных стадий их развития. Появилась возможность определить основные параметры поля, найти масштабы для использования наших безразмерных функций и аргументов ⁽¹⁾, приближенно учесть изменчивость этих масштабов.

Для решения поставленной задачи вспомним, что передача энергии ветра волнам характеризуется ⁽¹⁾, стр. 78 и 112) аэродинамическим коэффициентом $\bar{\chi}$, зависящим от крутизны волн: $\bar{\chi} = \kappa r / R$. Здесь r — радиус орбиты поверхностных частиц на волне, R — так называемый радиус круга качения ($R = \lambda / 2\pi$). В свою очередь, безразмерный коэффициент κ входит в выражение предельного значения r_∞ для штормовых волн в океане при заданной скорости ветра V :

$$r_\infty = \frac{9}{\pi} \frac{\kappa}{k^2} \frac{\delta_a}{\delta} \left(\frac{R}{r} \right)_\infty \frac{(V - c)^2}{g}. \quad (1)$$

Здесь δ_a и δ — плотность воздуха и воды; c — фазовая скорость волн; g — ускорение в поле тяжести; k — коэффициент, характеризующий турбулентные явления в воде во время волн. Внесем коэффициенты κ и k в полное уравнение баланса ветровых волн на произвольном расстоянии x от наветренного берега. Для произвольного момента времени, отстоящего от начала работы ветра на промежуток t , запишем

$$\delta g r \frac{\partial r}{\partial t} = \kappa \left(\frac{r}{R} \right) \frac{2r}{T} \delta_a (V - c)^2 - \frac{2\pi}{9} \delta g \frac{k^2}{T} \left(\frac{r}{R} \right)^2 r^2 - \frac{5}{8} \delta g^{1/2} \left(\frac{R}{r} \right)^{1/2} r^{3/2} \frac{\partial r}{\partial x}. \quad (2)$$

Сократив на $\delta g r$ обе части уравнения (2) и используя выражение (1), заимствованное из работы ⁽¹⁾, вновь представим уравнение баланса энергии в простейшей форме, перейдя от аргументов x , t к безразмерным аргументам ξ , τ и от функции r к безразмерной функции η :

$$\frac{\partial \eta}{\partial \tau} = 1 - \eta - \eta^{1/2} \frac{\partial \eta}{\partial \xi}. \quad (3)$$

Прежний вид сохраним теперь только для выражения $\eta = r / r_\infty$ ⁽¹⁾, стр. 95). Что касается выражений для ξ и τ , то они запишутся в новой форме, позволяющей лучше находить масштабы линейные и масштабы времени. Сперва запишем новые выражения применительно к конечной стадии волн — к установившемуся волнению, а потом постараемся учесть изменения масштабов на промежуточных этапах. Тогда окажется, прежде всего:

$$\frac{x}{\xi} = 0,895 g^{1/2} \frac{T_\infty}{k^2} \left(\frac{R}{r} \right)_\infty^{1/2} r_\infty^{1/2}. \quad (4)$$

Но известно, что, с одной стороны, $g^{1/2} R_\infty^{1/2} = c_\infty$. С другой стороны, c_∞ выражается через V посредством соотношения, выведенного в (1), § 24: $c_\infty/V = f_\infty$. Следовательно, можно записать:

$$\frac{x}{\xi} = 0,895 f_\infty \frac{T}{k^2} \left(\frac{R}{r} \right)^2 V. \quad (5)$$

На основании большого числа инструментальных измерений можно с достаточной надежностью считать, что $f_\infty = 0,75$; $(R/r)_\infty = 8$ (это значение вытекает и из нашей теории (2, 3)). Подставив эти числа в (5), получим выражение для важного коэффициента k в явной форме:

$$k = 6,56 \sqrt{\frac{\xi}{x} VT}. \quad (6)$$

Нам удалось определить числовое значение k на основании наблюдения практически установившихся волн, подходивших к кораблю от наветренного берега глубокого моря. Исходные величины были $x = 104$ км, $V = 9,7$ м/сек, $T = 4,2$ сек. Измеренному периоду волн T соответствует длина волн $\lambda = 27,5$ м. Недавние записи профилей волн в штормовом бассейне позволяют считать, что наибольшая возможная крутизна волн достигается при $\lambda_0 \approx 1$ м. Следовательно, по формуле (22) нашей работы (2), можно положить $h = 1,4$ м. По кривой фиг. 46 монографии (1) находим для заданной скорости ветра предельную возможную в океане высоту волн $h_\infty = 2$ м. Следовательно, $\eta = 1,4/2 = 0,7$.

По кривой фиг. 38 из монографии (1) определяем для этого значения η соответствующее ему значение $\xi = 0,76$. В соответствии с ним, на основании уравнения (6), будет $k = 0,113$. Подставим это значение вместе с другими известными числами в формулу (5) для вычисления масштабного отрезка. Получим

$$\frac{x}{\xi} = 3360 VT \text{ м} = 3,36 VT \text{ км}. \quad (7)$$

Найденное числовое значение k отличается от того числа ($k = 0,36$), которое было получено Карманом из опытов над турбулентными потоками в трубах ((1), стр. 92; (4)). Поэтому проверим вычисления на примере громадных волн, которые наблюдались на Черном море во время исключительно долго продолжавшегося шторма в январе 1931 г. Тогда ветер со скоростью 22 м/сек дул 2 суток подряд в направлении ЗЮЗ и создал штормовые волны длиной 170 м в восточной части моря при $x = 1100$ км. На основании (1), по кривой фиг. 46 этой скорости ветра соответствует $h_\infty = 9$ м, а на основании (2) и приближенного допущения $\lambda_0 \approx 1$ м, $h_0 \approx 1/7$ м следует полагать, что приблизительно $\lambda_\infty = 200$ м и $T_\infty = 11,3$ сек. Тогда, по (7), получим $x/\xi = 870$ км, и, значит, наибольшее безразмерное расстояние $\xi = 1100/870 = 1,27$. По кривой фиг. 38 из монографии (1) этому значению отвечает $\eta = 0,835$. Следовательно, можно ожидать образования установившихся волн с высотой $h = 7,5$ м в первом приближении.

На рис. 1 кривая 1 дает в первом приближении распределение высот волн на различных расстояниях x от наветренного берега, аналогичное кривой a на рис. 38 монографии (1), при значении масштабного отрезка $x/\xi = 870$ км.

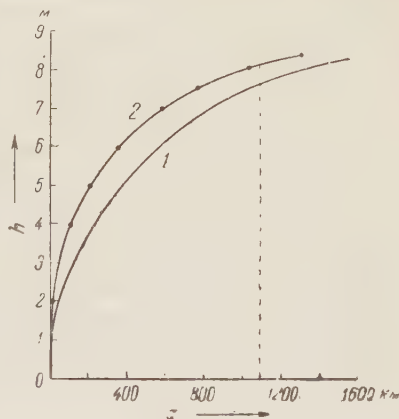


Рис. 1

Найдем теперь второе приближение, учтя изменчивость масштабов в поле штормовых волн. К сожалению, невозможно учесть изменчивость коэффициента κ и величины $V - c$.

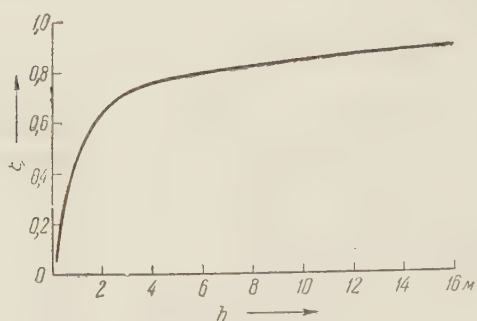


Рис. 2

равны произведению абсцисс кривой 1 на $\frac{T}{T_{\infty}} \frac{(R/r)^2}{(R/r)_{\infty}^2}$. В свою очередь

$$\frac{T}{T_{\infty}} \frac{(R/r)^2}{(R/r)_{\infty}^2} = \left(\frac{\lambda}{\lambda_{\infty}} \right)^{1/2} \frac{(R/r)^2}{(R/r)_{\infty}} = \left(\frac{h}{h_{\infty}} \right)^{1/2} \frac{(R/r)^{5/2}}{(R/r)_{\infty}^{5/2}}.$$

На основании работы (2) и на основании приближенного значения $\lambda_0 \approx 1$ м на рис. 2 построена кривая, представляющая $\zeta = \frac{(R/r)^{1/2}}{(R/r)_{\infty}^{1/2}}$ как функцию высоты волн h . С другой стороны, дробь $(h/h_{\infty})^{1/2}$ непосредственно определится для каждого значения аргумента h , поскольку известно значение h_{∞} , соответствующее заданной скорости ветра V . После умножения абсцисс кривой 1 на $\zeta(h/h_{\infty})^{1/2}$, получены точки, через которые на рис. 1 проведена кривая 2. Это — второе приближение к истинному распределению высот установившихся волн.

Нарастание волн во времени на бесконечно большом расстоянии от наветренного берега можно было бы описать простой формулой, полученной посредством интегрирования (3) при условии $\partial \eta / \partial \xi = 0$. Именно,

$$\eta = 1 - e^{-\tau}. \quad (8)$$

Масштаб времен в первом приближении определяется путем сопоставления (2) с (3) на конечной стадии развития волн:

$$\frac{t}{\tau} = \frac{9}{2\pi} \left(\frac{R}{r} \right)^2 \frac{T}{k^2}. \quad (9)$$

Подставив в (9) найденное числовое значение k и упомянутое значение $(R/r)_{\infty}$, получим вместо (9) рабочую формулу $t/\tau = 7800 T \text{ сек.} = 3,36 T \text{ час.}$ Для первого приближения можно принять* на этом основании и на основании (8), что в точке, отстоящей на x от наветренного берега, высота $h_{x,t}$ неустановившихся волн выразится через высоту установившихся волн $h_{x,\infty}$ (там же) простой формулой

$$h_{x,t} = h_{x,\infty} (1 - e^{-t/2,16T}); \quad (10)$$

здесь период волн выражается в секундах. Как отмечено $T_{\infty} = 11,3 \text{ сек.}$ Значит, масштаб времени будет $t/\tau = 24,4 \text{ часа.}$ Именно эта величина появится в знаменателе дроби в показателе степени при e в (10). По рис. 1 во втором приближении высота установившихся волн на расстоянии 1100 м от наветренного берега равна 8,1 м. Значит, в (10) надо подставить $h_{x,\infty} = 8,1$. В результате, по (10) получим кривую 1 на рис. 3, дающую в первом приближении закон нарастания волн у подветренного берега.

*В работе (1) показано, что это — одно из приближений к полному интегралу уравнения (3) настоящей статьи, и притом наиболее удобное для учета изменений масштабов.

Второе приближение найдем тем же способом, каким находили второе приближение на диаграмме рис. 1: структура формулы (9) показывает, что изменения T и $(R/r)^2$ на промежуточных этапах могут быть по-прежнему учтены посредством умножения абсцисс кривой 1 на функцию ζ , определяемую на диаграмме рис. 2, и на $(h/h_\infty)^{1/2}$.

На рис. 3 нанесены точки, полученные таким способом, и через них проведена кривая 2, которая дает закон нарастания высот у подветренного берега во втором приближении. Как видим, даже за большой срок работы шторма — за 2 суток — волны не могут считаться установившимися: они могли бы еще возрасти в высоту не менее, чем на 0,6 м.

Сам численный результат анализа поля ветровых волн, произведенный на основе найденного значения параметра k , привел нас к величинам несколько заниженным: максимальная высота волн была не 7,5 м, а, по всей вероятности, — около 7,8—8 м.

На большую точность нельзя претендовать в настоящее время не только при анализе поля волн, но и при самом определении коэффициента k : необходимо проделать подобное определение на основе большого числа надежных инструментальных измерений волн в океане. Подобный материал, несомненно, будет под рукой у исследователей в результате работ 3-го Международного геофизического года. Во всяком случае, уже сейчас можно утверждать, что единственная гипотеза, внесенная нами выше для исправления масштабов, не приводит к грубым ошибкам в анализе поля штормовых волн. Остальные стороны анализа свободны от шаткой эмпирики и от каких бы то ни было специальных допущений.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
21 XII 1957

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ В. В. Шулейкин, Тр. Морск. гидрофиз. инст. АН СССР, 9 (1956). ² В. В. Шулейкин, ДАН, 111, № 2, 348 (1956). ³ В. В. Шулейкин, ДАН, 113, № 3, 560 (1957).
⁴ С. В. Доброклонский, ДАН, 58, № 7, 1345 (1947).

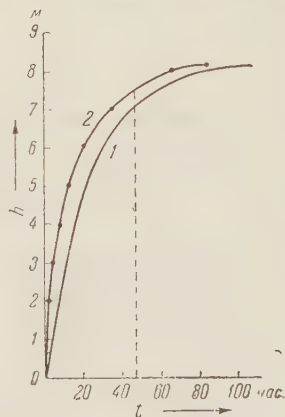


Рис. 3

О. С. ИВАНОВ

НЕКОТОРЫЕ ЗАКОНОМЕРНОСТИ В ДВОЙНЫХ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

(Представлено академиком И. П. Бардиным 21 VI 1957)

Поскольку в выражении для термодинамического потенциала все члены кроме энтропии смещения связаны в конечном итоге с взаимодействием атомов, диаграмма состояния, соответствующая минимуму термодинамического потенциала, является отражением химического взаимодействия компонентов и ее вид определяется строением внешней электронной оболочки атомов компонентов: ее размером, энергетическими уровнями и их заполнением электронами. Первое оценивается межатомным расстоянием, второе — электронной формулой или местом элемента в периодической системе. На характере диаграммы состояния сказываются также и тонкие особенности строения электронной оболочки, находящие выражение, например, в кристаллической структуре и температуре плавления элементов.

Как известно, сходство межатомных расстояний (диаметров атомов в кристаллической решетке) и электронных формул способствует образованию твердых растворов. Это нашло свое выражение в давно сформулированных требованиях: совпадение благоприятного объемного фактора с благоприятным электрохимическим фактором (Юм-Розери), сходство волновых функций валентных электронов и числа так называемых свободных электронов (Конобеевский, Агеев). Указанные условия приводят к энергии смещения

$$U_{AB} = \frac{U_{AA} + U_{BB}}{2}$$
 близкой к нулю, что согласно расчетам диаграмм состояния и является необходимым условием образования твердых растворов. Если указанная величина становится значительной положительной, то взаимная растворимость компонентов падает; если, наоборот, она становится значительной отрицательной, то появляются химические соединения. Все эти закономерности неоднократно прослеживались, однако необходимо подчеркнуть преобладание химического фактора над размерным.

Так, в γ -Fe медь обладает ограниченной, а палладий, неограниченной растворимостью, хотя по размеру атома Cu ближе к Fe, чем Pd. Причина заключается в образовании у Cu относительно устойчивой электронной оболочки $3d^{10}$, благодаря чему между железом и медью не могут появиться заметные силы химической связи, которые могли бы компенсировать затраты энергии на упругие искажения, возникающие при смещении атомов железа и меди несколько различной величины. Серебро и золото с практически одинаковыми размерами атомов различаются по своему отношению к железу: первое не образует с железом растворов ни в жидком, ни в твердом состоянии, в то время как золото и железо обладают неограниченной растворимостью в жидком и значительной растворимостью в твердом состояниях. Наличие соединения дает основание считать, что это вызвано появлением заметного химического сродства между электронными оболочками Fe $3d^6 4s^2$ и Au $5d^{10} 6s^1$, в то время как оно естественно слабее для более близких электронных оболочек Fe и Ag $4d^{10} 5s^1$.

строенных оболочках (рис. 1А). В системе Ti—V нет соединений. С хромом образуется одно соединение $TiCr_2$, с марганцем — два: $TiMn$ и $TiMn_2$, с железом — также два $TiFe$ и $TiFe_2$, с кобальтом образуется уже три соединения Ti_2Co , $TiCo$ и $TiCo_2$, с никелем также три Ti_2Ni , $TiNi$, $TiNi_3$, наконец, с медью образуются 4 соединения Ti_2Cu , $TiCu$, Ti_3Cu_3 и $TiCu_3$. Устойчивость этих соединений, оцениваемая по температуре разрушения их кристаллической решетки, в общем возрастает до кобальта, а затем снижается при переходе к никелю и далее к меди. Эту тенденцию можно легко проследить, например, по соединению $TiMe$. Рост устойчивости объясняется увеличением различия в числе электронов или групп в периодической системе между титаном и вторым компонентом, снижение устойчивости при переходе к Ni и, особенно, к Cu, естественно объяснить образованием $3d^{10}$ оболочки у второго компонента. Аномалия, заключающаяся в задержке роста устойчивости при переходе от $TiCr_2$ к $TiMn_2$ следует связать с образованием половинной оболочки $3d^5$ как у Cr, так и у Mn. Те же закономерности в отношении образования химических соединений как будто соблюдаются в двойных системах циркония и тория с металлами 3d-ряда. Однако экспериментальные данные здесь менее полны.

В связи с тем, что радиус тория относительно велик, его системы с Ti, V, Cr, Nb, Ta, Mo, W являются эвтектическими с растворимостью в твердом состоянии менее 0,1%. В системе Th—Mn различие в электронной структуре компонентов приводит уже к возникновению трех химических соединений $ThMn_2$, Th_6Mn_{23} и $ThMn_{12}$. Рост этого различия дает 4 соединения: Th_7Fe_3 , $ThFe_3$, $ThFe_5$, Th_2Fe_{17} в системе Th—Fe; 5 соединений: Th_7Co_3 , $ThCo_{2-3}$, $ThCo_5$ и Th_2Co_{17} в системе Th—Co; 5 соединений: Th_7Ni_3 , $ThNi$, $ThNi_2$, $ThNi_5$ и Th_2Ni_{17} в системе Th—Ni, причем второе и четвертое устойчивы до сравнительно высоких температур. Переход к системе Th—Cu сокращает число соединений до трех Th_2Cu , $ThCu_2$, $ThCu_4$ и понижает устойчивость их кристаллической решетке. Таким образом наблюдается та же закономерность, что для систем с Fe и Ti.

В системах урана с металлами 3d-ряда также отчетливо выступает значение различия компонентов по числу электронов в недостроенном слое для существования химических соединений (рис. 1Б). Так, с Ti образуется соединение U_2Ti , устойчивое только до 900° . Ванадий и хром не образуют соединений с ураном, в то время как с марганцем образуются два соединения: U_6Mn и UMn_2 . В системе с Fe устойчивость подобных же соединений повышается, а в системе с Co появляется еще одно соединение UCo , наконец, Ni образует с U по крайней мере 5 соединений. В системе с медью, соответственно образованию у последней электронной оболочки $3d^{10}$, существует лишь одно малоустойчивое соединение UCu_5 и область несмешиваемости в жидком состоянии.

В ряде систем плутония с металлами ряда V—Ni, так же как для урана, было подмечено появление химических соединений, начиная с Pu—Mn и увеличение их числа и термической устойчивости решетки при переходе к Pu—Fe и далее к Pu—Ni (1).

Таким образом, рассмотрение накопленных экспериментальных данных по диаграммам состояния двойных систем показывает возможность установления общих закономерностей зависимости характера диаграмм от химической природы компонентов. Эти закономерности помогают понять сложную картину химического взаимодействия в металлическом состоянии и выявить детали химической характеристики элементов; кроме того они ориентируют исследователя при экспериментальном изучении диаграмм.

Поступило
21 VI 1957

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ С. Т. Конобеевский, Сессия АН СССР по мирному использованию атомной энергии, 1955. Заседания Отд. хим. наук, Изв. АН СССР, 1955, стр. 362.

С. В. СТРАХОВ

УРАВНЕНИЯ РЕЖИМА УСТАНОВИВШЕГОСЯ АСИНХРОННОГО ХОДА ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СИСТЕМ

(Представлено академиком В. С. Кулебакиным 29 I 1958)

В результате той или иной аварии, например короткого замыкания или потери возбуждения, одна или несколько синхронных машин могут выпасть из синхронизма и перейти в режим установившегося асинхронного хода. Для исследования этого режима необходимо знать, какой системой дифференциальных уравнений он описывается и, в частности, весьма важно знать, при каких условиях среди этих уравнений будут дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами. В этом случае полученную систему дифференциальных уравнений целесообразно решать с помощью счетных машин непрерывного или дискретного счета. Однако столь же важно знать, при каких условиях все дифференциальные уравнения исследуемой системы будут иметь только постоянные коэффициенты, ибо в этом случае их решение легко получается операторным методом или методом интеграла Фурье.

Рассмотрим схему, состоящую из двух синхронных генераторов (СГ1) и (СГ2) и асинхронного двигателя (АД1), включенного на зажимы СГ1 (см. рис. 1). Обозначения мгновенных значений продольных и поперечных составляющих токов и напряжений и их положительные направления даны на рис. 1.

Уравнения для интересующего нас режима установившегося асинхронного хода наиболее естественно получить как частный случай уравнений переходных электро-механических процессов, т. е. процессов при переменных и различных угловых скоростях ω_1, ω_2 и $\omega_{д1}$ роторов СГ1, СГ2 и АД1⁽¹⁾.

Итак, в соответствии с поставленной задачей примем, что угловые скорости ω_1, ω_2 и $\omega_{д1}$ заданы и постоянны, причем ω_1 и ω_2 различны между собой. Вводим скольжение

$$s = \frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_1}, \quad (1)$$

которое также будет постоянной величиной.

Как известно⁽²⁻⁴⁾, углы θ_1 и θ_2 между продольными осями d_1 и d_2 роторов СГ1 и СГ2 и магнитной осью фазы a статора определяются так:

$$\theta_1 = \int_0^t \omega_1 dt + \theta_{10} = \omega_1 t + \theta_{10}, \quad \theta_2 = \int_0^t \omega_2 dt + \theta_{20} = \omega_2 t + \theta_{20}, \quad (2)$$

$$\theta_2 - \theta_1 = (\omega_2 - \omega_1) t + \theta_{20} - \theta_{10} = -s\omega_1 t + \theta_{210}. \quad (3)$$

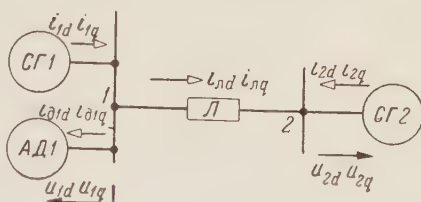


Рис. 1

Ввиду постоянства угловых скоростей ω_1 и ω_2 угловые ускорения роторов $СГ1$ и $СГ2$ равны нулю:

$$\frac{d^2\theta_1}{dt^2} = \frac{d\omega_1}{dt} = 0, \quad \frac{d^2\theta_2}{dt^2} = \frac{d\omega_2}{dt} = 0, \quad (4)$$

и отпадает необходимость в рассмотрении уравнений движения ⁽⁵⁾.

Вообще говоря, после численного решения той или иной задачи о расчете только электромагнитных переходных процессов в электрических системах уравнения движения роторов машин могут служить для проверки того, насколько постоянными остаются их угловые скорости в течение рассматриваемого промежутка времени. Начальное значение угла θ_{210} , так же как напряжения U_{1f} и U_{2f} на зажимах обмоток возбуждения $СГ1$ и $СГ2$, заданы и постоянны.

Итак, в соответствии с обозначениями, принятыми в ⁽¹⁾, считая, что оба синхронных генератора имеют продольные и поперечные успокоительные обмотки, и рассматривая только такие коммутации, когда нулевых составляющих токов и напряжений не возникает, имеем следующую систему дифференциальных уравнений:

$СГ1$:

$$\begin{aligned} u_{1d} &= -r_{c1}i_{1d} + \frac{d}{dt}(-L_{d1}i_{1d} + M_{f1}i_{1f} + M_{g1}i_{1g}) - (-L_{q1}i_{1q} + M_{h1}i_{1h})\omega_1, \\ u_{1q} &= -r_{c1}i_{1q} + \frac{d}{dt}(-L_{q1}i_{1q} + M_{h1}i_{1h}) + (-L_{d1}i_{1d} + M_{f1}i_{1f} + M_{g1}i_{1g})\omega_1, \\ U_{1f} &= r_{f1}i_{1f} + \frac{d}{dt}\left(-\frac{3}{2}M_{f1}i_{1d} + L_{f1}i_{1f} + M_{fg1}i_{1g}\right), \\ 0 &= r_{g1}i_{1g} + \frac{d}{dt}\left(-\frac{3}{2}M_{f1}i_{1d} + L_{g1}i_{1g} + M_{fg1}i_{1f}\right), \\ 0 &= r_{h1}i_{1h} + \frac{d}{dt}\left(-\frac{3}{2}M_{h1}i_{1q} + L_{h1}i_{1h}\right). \end{aligned} \quad (5)$$

Относя в дальнейшем уравнения $АД1$ и линии $Л$ к координатным осям, жестко связанным с ротором $СГ1$, имеем следующую систему уравнений для $АД1$:

$АД1$:

$$\begin{aligned} u_{1d} &= r_{d1}i_{d1d} + \frac{d}{dt}(L_{c11}i_{d1d} + L_{ad1}i_{1pd}) - (L_{c11}i_{d1q} + L_{ad1}i_{1pq})\omega_1, \\ u_{1q} &= r_{d1}i_{d1q} + \frac{d}{dt}(L_{c11}i_{d1q} + L_{ad1}i_{1pq}) + (L_{c11}i_{d1d} + L_{ad1}i_{1pd})\omega_1, \\ 0 &= r_{p1}i_{1pd} + \frac{d}{dt}(L_{p11}i_{1pd} + L_{ad1}i_{d1d}) - (L_{ad1}i_{d1q} + L_{p11}i_{1pq})(\omega_1 - \omega_{d1}), \\ 0 &= r_{p1}i_{1pq} + \frac{d}{dt}(L_{p11}i_{1pq} + L_{ad1}i_{d1q}) + (L_{ad1}i_{d1d} + L_{p11}i_{1pd})(\omega_1 - \omega_{d1}). \end{aligned} \quad (6)$$

Далее запишем уравнения первого закона Кирхгофа в точках 1 и 2. Отметим, что в точке 2 их нужно писать не только с учетом того, что положительные направления токов в $СГ2$ и в линии $Л$ противоположны, но и, главным образом, с учетом того, что уравнения линии $Л$ отнесены к осям, жестко связанным с ротором $СГ1$, а уравнения $СГ2$ — к осям, жестко связанным с его ротором.

Узел 1:

$$i_{1d} - i_{d1d} - i_{d1q} = 0, \quad i_{1q} - i_{d1q} - i_{1pq} = 0. \quad (7)$$

Узел 2:

$$\begin{aligned} i_{1d} + i_{2d} \cos(\omega_1 t - \theta_{210}) + i_{2q} \sin(\omega_1 t - \theta_{210}) &= 0, \\ i_{1q} - i_{2d} \sin(\omega_1 t - \theta_{210}) + i_{2q} \cos(\omega_1 t - \theta_{210}) &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

СГ2:

$$\begin{aligned}
 u_{2d} &= -r_{c2}i_{2d} + \frac{d}{dt}(-L_{d2}i_{2d} + M_{f2}i_{2f} + M_{g2}i_{2g}) - (-L_{q2}i_{2q} + M_{h2}i_{2h})\omega_2, \\
 u_{2q} &= -r_{c2}i_{2q} + \frac{d}{dt}(-L_{q2}i_{2q} + M_{h2}i_{2h}) + (-L_{d2}i_{2d} + M_{f2}i_{2f} + M_{g2}i_{2g})\omega_2, \\
 U_{2f} &= r_{f2}i_{2f} + \frac{d}{dt}\left(-\frac{3}{2}M_{f2}i_{2d} + L_{f2}i_{2f} + M_{fg2}i_{2g}\right), \\
 0 &= r_{g2}i_{2g} + \frac{d}{dt}\left(-\frac{3}{2}M_{f2}i_{2d} + L_{g2}i_{2g} + M_{fg2}i_{2f}\right), \\
 0 &= r_{h2}i_{2h} + \frac{d}{dt}\left(-\frac{3}{2}M_{h2}i_{2q} + L_{h2}i_{2h}\right).
 \end{aligned} \tag{9}$$

Линия Л:

$$\begin{aligned}
 u_{2d} \cos(\omega_1 t - \theta_{210}) + u_{2q} \sin(\omega_1 t + \theta_{210}) &= \\
 &= u_{1d} - r_{л1}i_{лd} - L_{л1} \frac{di_{лd}}{dt} + L_{л1}i_{лq}\omega_1, \\
 -u_{2d} \sin(\omega_1 t - \theta_{210}) + u_{2q} \cos(\omega_1 t - \theta_{210}) &= \\
 &= u_{1q} - r_{л1}i_{лq} - L_{л1} \frac{di_{лq}}{dt} - L_{л1}i_{лd}\omega_1.
 \end{aligned} \tag{10}$$

Таким образом, мы получили 20 линейных уравнений с 20 неизвестными: u_{1d} , u_{1q} , i_{1d} , i_{1q} , i_{1f} , i_{1g} , i_{1h} , u_{2d} , u_{2q} , i_{2d} , i_{2q} , i_{2f} , i_{2g} , i_{2h} , $i_{лd}$, $i_{лq}$, $i_{лr}$, $i_{лp}$, $i_{лd}$, $i_{лq}$. Из 20 уравнений 4 дифференциальных уравнения (8) и (10) содержат периодические коэффициенты, а 4 уравнения (7) и (8) являются алгебраическими. Суммарный порядок системы дифференциальных уравнений равен 16. Ряд неизвестных ($i_{лd}$, $i_{лq}$, u_{1d} , u_{1q} и др.) весьма просто можно исключить. Полученная система вполне доступна для решения на машинах непрерывного счета соответствующих типов и, конечно, на машинах дискретного счета любого типа.

Отсюда заключаем, что уравнения для режима установившегося асинхронного хода в системах, имеющих две и больше синхронных машины, всегда будут содержать периодические коэффициенты. Решения их, т. е. выражения для токов и напряжений, представятся бесконечным рядом гармоник, частоты которых, как известно, можно установить и из элементарных соображений, разлагая каждое из пульсирующих магнитных полей, возникающих в одноосных обмотках (возбуждения и успокоительных) синхронных машин, на два поля, вращающихся с частотой пульсации в противоположных направлениях относительно этих обмоток.

Если заменить СГ2 системой бесконечной мощности (рис. 2), частота напряжения которой ω_2 , то задача существенно упростится. Уравнения (8) и (9) отпадают, ибо в узле 2 система бесконечной мощности поддерживает постоянное напряжение. При этом, как указано в (3), нужно положить

$$u_{2d} = 0, \quad u_{2q} = U = \text{const.} \tag{11}$$

Тогда уравнения (10) переписутся в виде

$$\begin{aligned}
 U \sin(\omega_1 t - \theta_{210}) &= u_{1d} - r_{л1}i_{лd} - L_{л1} \frac{di_{лd}}{dt} + L_{л1}i_{лq}\omega_1, \\
 U \cos(\omega_1 t - \theta_{210}) &= u_{1q} - r_{л1}i_{лq} - L_{л1} \frac{di_{лq}}{dt} - L_{л1}i_{лd}\omega_1.
 \end{aligned} \tag{12}$$

В этом частном случае мы имеем 13 линейных уравнений (5), (6), (7) и (12) с постоянными коэффициентами, содержащих, естественно, 13 не-

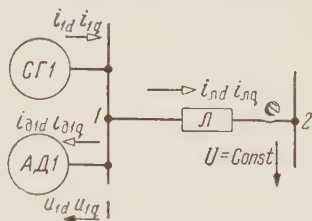


Рис. 2

известных функций: $u_{1d}, u_{1q}, i_{1d}, i_{1q}, i_{1f}, i_{1g}, i_{1h}, i_{d1d}, i_{d1q}, i_{1pd}, i_{1pq}, i_{ld}, i_{lq}$. Из них 2 уравнения являются алгебраическими. Суммарный порядок полученной системы дифференциальных уравнений равен 11.

Итак, в случае схемы, состоящей из одного синхронного генератора, связанного линией передачи с шинами бесконечной мощности, дифференциальные уравнения для режима установившегося асинхронного хода периодических коэффициентов не содержат.

Режим установившегося асинхронного хода будет описываться частным решением этой системы линейных дифференциальных уравнений. Легко видеть, что при этом все токи и напряжения будут иметь, кроме постоянной составляющей, еще члены вида $A_{1m} \sin(s\omega_1 t + \alpha_1)$ и $A_{2m} \cos(s\omega_1 t + \alpha_2)$. Переходя по известным формулам от составляющих d, q к фазным токам и напряжениям

$$i_a = \operatorname{Re} \{i_1 e^{j\theta_1}\} = \operatorname{Re} \{(i_{1d} + j i_{1q}) e^{j(\omega_1 t + \theta_{10})}\}, \quad (13)$$

получим, что, например, токи в статорах $СГ1$, $АД1$ и линии $Л$ будут иметь составляющие с частотами ω_1 , $(1-s)\omega_1$ и $(1+s)\omega_1$, что можно установить и непосредственно, исходя из физических соображений.

Московский энергетический
институт

Поступило
29 I 1958

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ С. В. Страх ов, Электричество, № 7 (1957). ² А. А. Гор ев, Переходные процессы синхронной машины, 1950. ³ С. В. Страх ов, Тр. Моск. энергетич. инст., в. 14 (1953). ⁴ С. В. Страх ов, Электричество, № 6 (1954). ⁵ Т. Л айб ль, Теория синхронной машины при переходных процессах, 1957.

Член-корреспондент АН СССР К. А. АНДРИАНОВ и А. К. ДАБАГОВА

СИНТЕЗ КРЕМНИЙОРГАНИЧЕСКИХ СОЕДИНЕНИЙ, СОДЕРЖАЩИХ МЕТАКРИЛЬНУЮ ГРУППУ

В развитие ранее проведенных исследований (¹) в настоящем сообщении описывается получение новых кремнийорганических соединений, содержащих метакрильную группу в углеводородном радикале у атома кремния, — метакрилатметилалкоксисиланов и метакрильных соединений — три-, тетра- и пентасилоксанов. Метакрилатметилалкоксисиланы получены по схеме:



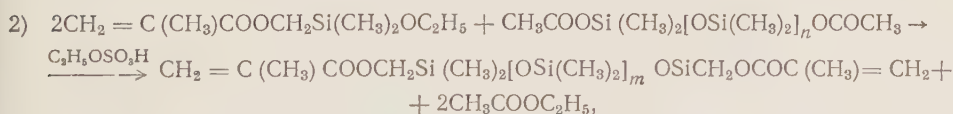
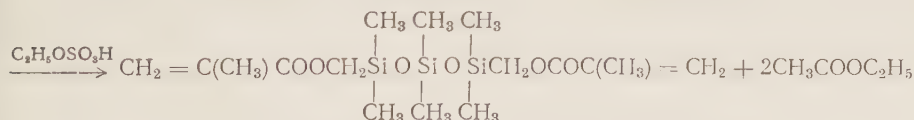
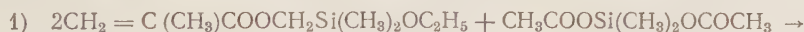
где R = C₂H₅, C₄H₉, а n = 2; 1; 0.

Свойства полученных соединений представлены в табл. 1.

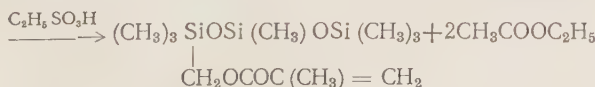
Таблица 1

Формулы	Т. кип. при 5 мм рт. ст.), °С	d ₄ ²⁰	n _D ²⁰	MR		Бромн. число		Si, %	
				найд.	выч.	найд.	выд.	найд.	выч.
CH ₂ =C(CH ₃)COOCH ₂ Si(CH ₃) ₂ OC ₂ H ₅	72—73	0,9421	1,4300	55,49	55,38	78,8	79,2	13,55	13,80
CH ₂ =C(CH ₃)COOCH ₂ Si(CH ₃)(OC ₂ H ₅) ₂	97—98	0,9753	1,4260	60,88	60,94	68,7	69,2	11,91	12,07
CH ₂ =C(CH ₃)COOCH ₂ Si(CH ₃) ₂ OC ₄ H ₉	86—87	0,9263	1,4320	64,75	64,43	69,3	96,6	12,11	12,15
CH ₂ =C(CH ₃)COOCH ₂ Si(CH ₃)(OC ₄ H ₉) ₂	126—127	0,9458	1,4345	79,40	79,38	54,8	55,6	10,14	9,72
CH ₂ =C(CH ₃)COOCH ₂ Si(OC ₄ H ₉) ₃	144—145	0,9610	1,4370	94,05	94,28	45,9	46,2	8,32	8,09

Для получения метакрильных соединений три-, тетра- и пентасилоксанов была исследована реакция гетерофункциональной соконденсации вышеуказанных алкоксисиланов с диметилдиацетоксисиланом и продуктами его гидролиза, а также с триметилацетоксисиланом по уравнениям:



где n = 1 или 2, а m = 2 или 3.



При изучении реакции гетерофункциональной соконденсации было найдено, что реакция легко протекает с образованием метакрильных соединений силоксанов и выделением этилацетата при температуре $\sim 20^\circ$, если в качестве катализатора использовать этилсерную кислоту, содержащую не менее 2 вес. % воды (считая на общее количество реагирующих кремнийорганиче-

Таблица 2

Формула	Т. кип. (при 2 мм рт. ст.), $^\circ\text{C}$	d_4^{20}	n_D^{20}	MR		Бромное число		Si. %	
				найд.	выч.	найд.	выч.	найд.	выч.
$\begin{array}{c} \text{CH}_3)_2\text{SiOSi}(\text{CH}_3)\text{OSi}(\text{CH}_3)_2\text{OCOC}(\text{CH}_3)=\text{CH}_2 \\ \text{CH}_3 \quad \text{CH}_3 \end{array}$	90—91	0,9170	1,4150	87,39	87,46	49,1	50,0	26,00	26,23
$\begin{array}{c} \text{CH}_2=\text{C}(\text{CH}_3)\text{COOCH}_2\text{Si}[\text{OSi}(\text{CH}_3)_2\text{CH}_2\text{OCO} \\ \text{CH}_3 \quad \text{CH}_3 \quad \text{CH}_3 \end{array}$	147—148	0,9862	1,4390	107,36	107,20	78,6	79,2	20,59	20,82
$\begin{array}{c} \text{CH}_3 \quad \text{CH}_3 \quad \text{CH}_3 \\ \text{CH}_2=\text{CCOOC}_2\text{H}_5\text{Si}[\text{OSi}(\text{CH}_3)_2\text{CH}_2\text{OCO} \\ \text{CH}_3 \quad \text{CH}_3 \quad \text{CH}_3 \end{array}$	162—163	0,9953	1,4360	125,45	125,84	65,5	67,0	23,52	23,43
$\begin{array}{c} \text{CH}_3 \quad \text{CH}_3 \quad \text{CH}_3 \\ \text{CH}_2=\text{CCOOC}_2\text{H}_5\text{Si}[\text{OSi}(\text{CH}_3)_2\text{CH}_2\text{OCO} \\ \text{CH}_3 \quad \text{CH}_3 \quad \text{CH}_3 \end{array}$	177—178	0,9941	1,4330	144,30	144,48	57,3	57,9	25,10	25,36

ских соединений). Свойства полученных соединений представлены в табл. 2. Подробное описание синтезов полученных непредельных кремнийорганических соединений излагается в другой статье*. Синтезированные метакрильные соединения изучаются с целью получения кремнийорганических полимеров, а также блокполимеров.

Экспериментальная часть

Получение метакрилатметилалкоксисиланов.

В автоклав, емкостью 150 мл, загружалась реакционная смесь, содержащая 0,26 моля хлорметилалкоксисиланов: 38,1 г хлорметилдиметилэтоксисилана, 45,5 г хлорметилметилдиэтоксисилана, 45,0 г хлорметилдиметилбутоксисилана, 59,6 г хлорметилметилдибутоксисилана или 74,1 г хлорметилтрибутоксисилана, 37,2 г (0,3 моля) метакрилата калия, 5 г меди (в виде порошка) и 0,3 г гидрохинона. Автоклав, при вращении, нагревался при 180° в течение 3,5 часа. По охлаждении автоклав вскрывался, реакционная смесь быстро фильтровалась для отделения KCl и непрореагировавшего $\text{CH}_2=\text{C}(\text{CH}_3)\text{COOK}$, после чего подвергалась вакуумной разгонке. Отбиралась фракция, кипящая в интервале 3° (на 1° выше и ниже соответствующих температур, указанных в табл. 1). Метакрилатметилбутоксисиланы можно получать и при нагревании в обычных условиях при температуре кипения реакционной смеси в течение 2 час. Выход 30 %.

Получение 1,3-диметакрилатметилгексаметилтрисилоксана, 1,4-диметакрилатметилоктаметилтетрасилоксана, 1,5-диметакрилатметилдекаметилпентасилоксана и 2-метакрилатметилгептаметилтрисилоксана. Реакционная смесь, содержащая 12,1 г (0,06 моля) метакрилатметилдиметилэтоксисилана и соответственно 4,4 г диметилдиацетоксисилана, 6,25 г 1,2-диацетокситетраметилдисилоксана (d_4^{20} 1,0232, n_D^{20} 1,4010) или 8,1 г 1,3-диацетоксигексаметилтрисилоксана.

* Направлено в журнал «Известия АН СССР, Отделение химических наук».

(d_4^{20} 1,0131, n_D^{20} 1,4030), или реакционная смесь, содержащая 11,6 г (0,06 моля) метакрилатметилметилдиэтоксисилана, 28,8 г (0,12 моля) триметилацетоксисилана, помещалась в круглодонную колбочку, емкостью 75 мл, снабженную механической мешалкой, термометром, капельной воронкой и холодильником. К смеси при перемешивании и охлаждении колбочки водой прибавлялось по каплям, в течение 10—15 мин., 5 или 10 вес. % (для получения 2-метакрилатметилгептаметилтрисилоксана) этилсерной кислоты, содержащей 2 вес. % воды. По окончании приливания этилсерной кислоты реакционная смесь расслаивалась на два слоя, перемешивание прекращалось и смесь оставлялась стоять на 48 час. при температуре $\sim 20^\circ$. По окончании выдержки нижний слой (этилсерная кислота) отделялся при помощи делительной воронки. Эфирный слой нейтрализовался NaHCO_3 , после чего подвергался разгонке. Вначале отгонялся этилацетат, а затем оставшийся продукт перегонялся в вакууме. При разгонке собирались фракции, кипящие при температурах, указанных в табл. 2. Выход 25—33%.

Поступило
11 II 1958

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ К. А. Андрианов, Н. С. Лезнов, А. К. Дабагова, Изв. АН СССР, ОХН, 1957, 459.

Ю. Б. КРЮКОВ, А. Н. БАШКИРОВ, В. К. БУТЮГИН, Л. Г. ЛИБЕРОВ
и Н. Д. СТЕПАНОВА

О ЕДИНСТВЕ МЕХАНИЗМА СИНТЕЗА УГЛЕВОДОРОДОВ И КИСЛОРОДСОДЕРЖАЩИХ СОЕДИНЕНИЙ ИЗ СО И Н₂

(Представлено академиком А. В. Топчиевым 26 XII 1957)

Исследователями, работавшими в области синтеза из СО и Н₂, предложены различные схемы механизма синтеза, согласно которым образование углеводородов, с одной стороны и кислородсодержащих соединений—с другой, протекает по независимым друг от друга реакционным путям (1-5). Получены, однако, экспериментальные данные (1,6-9), которые приводят к мысли о существовании определенного единства механизма в иницировании процесса синтеза и в построении углеродных цепочек алифатических соединений из СО под воздействием водорода.

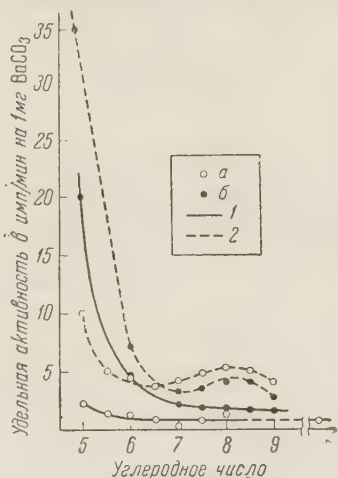


Рис. 1. Удельная активность углеводородов (а) и спиртов (б) в зависимости от углеродного числа (опыты с бутанолом удельной активности 780 имп/мин на 1 мг BaCO₃), 1—концентрация бутанола 0,04 об.%; условия синтеза 150 ат, 200°, объемная скорость 1СО+2Н₂ равна 2000 час.⁻¹; удельная активность на выходе из реактора: бутанола 386 имп/мин, СО₂ 3,8 имп/мин, СО 0 имп/мин); 2 — концентрация бутанола 0,1 об.%; условия синтеза: 90 ат, 160—180°; объемная скорость 1СО+4Н₂ равна 500 час.⁻¹; удельная активность на выходе из реактора: бутанола 460 имп/мин, СО₂ 4,9 имп/мин, СО 0 имп/мин; бутилена 0,15 имп/мин

Получение прямого экспериментального доказательства такого единства механизма образования углеводородов и спиртов из СО и Н₂ представляет весьма существенный интерес. С этой целью в настоящей работе были изучены пути превращений спиртов в реальных условиях синтеза, когда основные продукты синтеза представляли собой смесь углеводородов и спиртов. Индикаторами поведения образовавшихся из СО и Н₂ спиртов являлись меченные С¹⁴ бутанол и метанол, добавлявшиеся к газу синтеза в количествах, не нарушающих условий, существующих на поверхности катализатора.

Опыты проводились с плавленными железными катализаторами при высоких давлениях (100—150 ат.) в условиях, обеспечивающих получение приблизительно равных количеств углеводородов и кислородсодержащих соединений (в основном спиртов). Полученные продукты реакции разделялись на углеводороды и спирты, а затем разгонялись на ректификационной колонке. Фракции от С₁ до С₉ и остатки подвергались радиометрическому анализу по методике, применявшейся ранее (10).

На рис. 1 даны типичные результаты, полученные при добавлении бутанола-1-С¹⁴ в исходную газовую смесь.

В примененных условиях бутиловый спирт обладает малой реакционной способностью. Основная масса введенного меченого бутанола (90—95%)

проходит реакционную зону без изменения. Вместе с тем отчетливо обнаруживается, что меченый (а следовательно, и немеченый) бутиловый спирт в определенной степени может принимать участие в образовании как высших спиртов, так и соответствующих углеводов. Однако удельная активность бутанола по выходу из реактора в этом случае составляет около 400 имп/мин на 1 мг BaCO_3 , в то время как удельные активности последующих фракций — единицы импульсов. Эти данные показывают, что менее согой доли углеводов выше C_4 и спиртов C_6 — C_9 могло образоваться при участии бутанола.

Таким образом, общий баланс по радиоактивности и сравнение удельных активностей приводят к однозначному выводу, что бутанол не является промежуточным продуктом при синтезе углеводов и кислородсодержащих соединений из окиси углерода и водорода на плавящихся железных катализаторах. При этих обстоятельствах наличие радиоактивности как в углеводородах, так и в спиртах (имеющих к тому же один порядок удельной активности) может быть объяснено промежуточным участием некоего кислородсодержащего комплекса, образующегося, хотя и в малой степени, из бутилового спирта при взаимодействии с поверхностью катализатора. Этот комплекс, по-видимому, подобен комплексу, образующемуся в ходе синтеза на поверхности катализатора из CO и H_2 и ответственному за рост углеродной цепочки. Из этого комплекса образуются как углеводороды, так и спирты, причем по мере роста углеродной цепочки активность естественно, должна уменьшаться за счет последовательного присоединения неактивных атомов углерода, что и наблюдается в действительности.

С изложенных позиций, аномально высокие значения удельной активности амилового и гексилового спиртов свидетельствуют о наличии самостоятельной ветви превращений спиртов, не зависящей от основной линии синтеза. Эти превращения, очевидно, подобны известной реакции гомологизации спиртов. Радиоактивность, вызванная этим рядом превращений, естественно, резко падает с переходом от низшего спирта к высшему и уже начиная с гептилового спирта практически не обнаруживается.

Наблюдаемая же активность в спиртах C_7 — C_9 , как и активность в углеводородах, имеет своей причиной рост кислородсодержащего комплекса, являющегося общим родоначальником для углеводов и спиртов.

В опыте 2, когда концентрация радиоактивного бутанола в реакционной смеси была повышена в 2,5 раза (по сравнению с опытом 1), естественно, повысились удельные активности во всех полученных фракциях, и в большей мере проявились побочные реакции спиртов (см. рис. 1). Появился максимум удельной активности в цепи с 8 атомами углерода, который указывает на возможность протекания при благоприятных условиях межмолекулярной конденсации спиртов, и в частности бутанола, или же конденсации 2 поверхностных комплексов C_4 .

Дегидратация бутанола идет в изученных условиях лишь в незначительной степени, и поэтому наблюдаемое распределение радиоактивности не может быть объяснено реакциями бутилена, что подтверждается результатами изучения поведения бутилена в аналогичных условиях ⁽¹¹⁾.

Особый интерес, с точки зрения единства механизма, представляло изучение поведения метанола в условиях синтеза из CO и H_2 , так как последний, при взаимодействии с катализатором может дать образование, содержащее лишь один атом C .

Из полученных при этом данных видно (рис. 2), что метанол в условиях синтеза значительно легче, чем бутанол, подвергается различным превращениям: он в значительной мере разлагается с образованием окиси углерода и водорода, окисляется до двуокиси углерода и принимает участие в синтезе спиртов и углеводов. На более $1/10$ части всех углеводов и спиртов могло образоваться при участии метанола. Удельная радиоактивность углеводов и спиртов с одинаковой длиной цепи практически совпадает, что доказывает их общее происхождение.

Однако имеется не только количественная, но и качественная разница в поведении метанола и бутанола: принципиально отличается характер участия спирта в образовании углеродных цепочек. Удельная радиоактивность в продуктах синтеза сохраняется постоянной независимо от длины цепи. Молярная радиоактивность линейно растет по мере роста длины

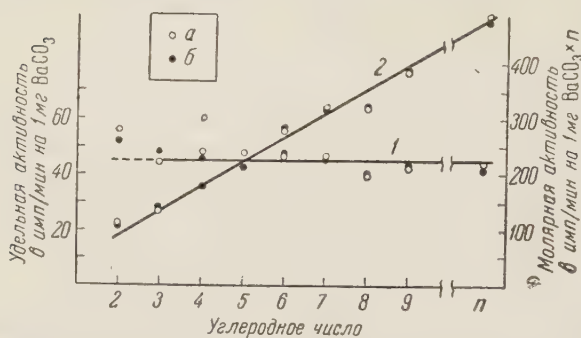
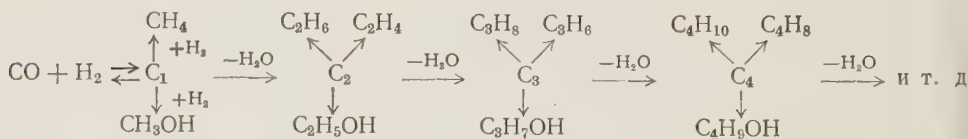


Рис. 2. Удельная (1) и молярная (2) радиоактивность углеводородов (а) и спиртов (б) в зависимости от углеводородного числа (опыт с метанолом удельной активности 3000 имп/мин на 1 мг BaCO_3 ; условия опыта: 90 ат., 210—220°; объемная скорость $\text{CO} + \text{H}_2$ равна 1600 час⁻¹; удельная активность на выходе из реактора: метанола 300 имп/мин, CO_2 75 имп/мин, CO 12 имп/мин)

молекулы. Это означает, что метанол принимает участие не только в иницировании роста углеродной цепи, но и в самом ее росте, многократно регулярно включаясь в растущую цепочку. Однако сравнение удельной активности метанола (300 имп/мин на 1 мг BaCO_3) и остальных продуктов синтеза (в среднем 44 имп/мин) показывает, что не сам метанол является промежуточным продуктом, а некоторое поверхностное соединение, сравнительно легко образующееся из метанола. Этот поверхностный комплекс, по-видимому,

аналогичен или даже идентичен первичному комплексу, образующемуся на поверхности катализатора в ходе синтеза из CO и H_2 и ответственного за рост углеродной цепочки. Из совокупности полученных данных следует, что процессы синтеза из CO и H_2 углеводородов и кислородсодержащих соединений взаимосвязаны. Углеводороды и спирты при синтезе их из CO и H_2 на плавленных железных катализаторах имеют общего родоначальника. Последний представляет собой неустойчивый промежуточный комплекс на поверхности катализатора, получаемый при первичном акте взаимодействия CO и H_2 и имеющий в своем составе атомы C , H и O . Этот промежуточный комплекс (C_1) может конденсироваться с себе подобным, обеспечивая образование углерод-углеродной связи и нового кислородсодержащего промежуточного соединения с двумя атомами углерода C_2 . Дальнейший рост происходит за счет последовательного присоединения первичного промежуточного образования C_1 к растущим комплексам C_2 , C_3 , C_4 и т. д.



Следует указать, что наряду с предложенным механизмом роста углеродной цепочки, непосредственно вытекающим из полученных экспериментальных данных, не исключена также возможность включения в растущую цепочку реагирующих с растущим комплексом молекул CO и H_2 , еще не связанных в первичный комплекс. Вероятно, возможно также соединение между собой более крупных агрегатов C_2 , C_3 , C_4 и т. д., хотя в изученных условиях этот путь роста играет подчиненное значение. Рост данной цепочки идет непрерывно на поверхности катализатора, пока в результате более или менее полного гидрирования растущего комплекса или его перестройки и десорбции не образуется устойчивое соединение — альдегид, спирт, олефин

или парафин. Уже образовавшийся спирт или углеводород (олефин или парафин) не могут служить промежуточным продуктом. Но они могут, повторно вступив в контакт с поверхностью катализатора, претерпеть указанные выше вторичные превращения, глубина которых будет зависеть от свойств катализатора и условий синтеза. Спирты при этом могут также частично переходить в тот промежуточный комплекс, из которого они были образованы при синтезе из CO и H_2 . В той мере, в какой спирты могут генерировать этот промежуточный комплекс, они будут включаться в цепи, растущие на поверхности катализатора.

Институт нефти
Академии наук СССР

Поступило
24 XII 1957

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ Г. Сторч, Н. Голамбик, А. Андерсон, Синтез углеводородов из окиси углерода и водорода, ИЛ, 1954. ² F. Fischer, H. Koch, Brennst.-Chem., **13**, 428 (1932). ³ S. R. Saxford, Trans. Farad. Soc., **35**, 946 (1939). ⁴ G. D. Graves, Ind. and Eng. Chem., **23**, 1381 (1931). ⁵ P. K. Frolich, D. S. Cryder, Ind. and Eng. Chem., **22**, 1051 (1930). ⁶ H. Pichler, K. H. Ziesecke, B. Träger, Brennst.-Chem., **31**, 361 (1950). ⁷ J. T. Kummer, P. H. Emmett, J. Am. Chem. Soc., **75**, 5177 (1953). ⁸ J. T. Kummer, W. B. Spencer, H. H. Podgurski, P. H. Emmett, J. Am. Chem. Soc., **73**, 564 (1951). ⁹ D. Gall, E. J. Gibson, C. C. Hall, J. Appl. Chem., **6**, 371 (1952). ¹⁰ Ю. Б. Крюков, А. Н. Башкиров и др., Хим. и технол. топлив и масел, **6**, 26 (1957). ¹¹ Ю. Б. Крюков, А. Н. Башкиров и др., Изв. АН СССР, ДХН, 1958, 642.

И. Н. ЛЕПЕШКОВ, Н. Н. РОМАШЕВА и В. К. СОЛОВЬЕВ

О КАЛИЕНОСТИ СОЛЯНЫХ ОТЛОЖЕНИЙ ТУВЫ

(Представлено академиком И. И. Черняевым 14 IX 1957)

На территории Тувинской автономной области имеются соляные озера и источники и издавна известно соляное месторождение Туз-Таг (Соляная гора), расположенное в предгорьях Южного склона хребта Западный Танну-Ола, в 160 км юго-западнее г. Кызыл (рис. 1).



Рис.1 Схематическая карта Тувинской Автономной области. а — соляное месторождение, б — соляные и слабоминерализованные озера: 1 — Хак, 2 — Чадыр, 3 — Хадын, 4 — Сватиково, 5 — Кач-Холь, 6 — Дус-Холь I, 7 — Дус-Холь II, 8 — Как-Холь II, 9 — Шара Нур, 10 — Амангейдын-Холь; в — выходы солевых источников по северному склону хр. Танну-Ола: 11 — на р. Хурегеча, 12 — на р. Тустухем

В литературе имеются данные по некоторым озерам Тувы и соляному месторождению Туз-Таг (1-4). Обследование соляных озер и солевых отложений Тувы было нами проведено впервые в 1953 г. Физико-химическая характеристика соляных и слабоминерализованных озер Тувы была дана нами в работе (5). В данной статье мы даем характеристику соляных отложений Туз-Таг, обращая особое внимание на калийные и другие соли морского типа.

Соляные отложения Туз-Тага связаны с существованием морских бассейнов на территории Тувы в верхнесилурийский и нижнедевонский геологические периоды (рис. 2). Общая мощность соленосных отложений Туз-Тага свыше 300 м (6). Солевые пласты Туз-Тага, залегающие под углом 40—45°

выходят на поверхность. На месторождении издавна существует промысел по добыче каменной соли и имеется ряд карьеров (выработок) глубиной до 3—5 м. Нами были обследованы пласты соли, выходящие на поверхность, и отобраны пробы для исследования. В четырех пластах соль серого цвета и лишь в одном среднем пласте наряду с серой солью имелись прослойки розового, лимонно-желтого и мясо-красного цвета (мощность прослоек 3—10 см). Подобная окраска соли характерна для природных калийных солей.

При химическом исследовании проб солей, отобранных из этих прослоев, нами было обнаружено значительное количество хлористого калия (до 65%).

В табл. 1 приведены химические анализы некоторых образцов калийных солей, взятых в среднем карьере. Как видно из анализов, образцы солей представлены сильвинитом с большим содержанием хлористого калия. В связи с обнаружением большого содержания хлористого калия в некоторых образцах солей, отобранных в солевых пластах месторождения Туз-Таг, нами были просмотрены керны солей, извлеченные в 1951 г. Горно-геологической экспедицией из скважин, пробуренных на месторождении Туз-Таг. Было отобрано 100 проб солей из 8 скважин с различных глубин



Рис. 2. Карта распространения морских бассейнов на территории Тувы и в прилегающих районах. 1 — верхнесилурийский морской бассейн, 2 — нижнедевонское море

Таблица 1 -

№ образца	KCl	MgCl ₂	NaCl	CaSO ₄	CaCl ₂	Остаток нераств. в воде	Сумма солей	Окраска солей
	в весовых процентах							
74	65,63	2,58	21,90	3,39	—	4,09	97,59	Лимонно-желтая
71	43,91	0,86	52,43	0,64	0,11	1,39	99,34	Мясо-красная
70	10,09	—	72,72	0,48	0,61	15,08	98,98	Розовая

Общий просмотр сохранившихся кернов показал, что наряду с каменной солью серого цвета, имеются керны с включениями солей желтого, розового и красного цвета. Многие керны, в особенности имеющие розовую, темно-красную и желтую окраску, сильно размыты, вероятно, в результате промывки скважин в процессе бурения. Калийные и магниевые соли могли быть в значительной степени вымыты из солевых кернов.

Как показали данные химических анализов, наиболее калиеносными являются керны солей из скважин №№ 7 и 8 с глубины от 15 до 105 м. Содержание хлористого калия в отдельных образцах, взятых из керна, достигает 16—39%.

Ниже приведены химические анализы калиеносных включений в кернах солей из скважин №№ 5, 7 и 8 (табл. 2).

Калийные соли в этих образцах представлены в виде сильвинита, так же как и в образцах, отобранных нами в солевых пластах, выходящих на поверхность.

Необходимо отметить, что Горно-геологической экспедицией не было обнаружено значительного содержания калийных солей в кернах вероятно вследствие того, что анализ средней пробы производился без детальных исследований отдельных образцов и калиеносных включений.

Таблица 2

№ образца	№ скважины	Глубина в м	KCl	NaCl	CaSO ₄	CaCl ₂	MgCl ₂	Остаток нераств. в воде	Сумма солей
			в весовых процентах						
187	8	16, 5—18,3	39,56	56,58	0,90	0,18	—	1,47	98,79
189	8	23,30—24,30	1,98	95,72	0,50	0,03	—	0,45	98,68
180	7	59,1—68,8	16,21	77,27	1,06	0,32	—	4,26	99,12
183	7	90,7—100,1	3,77	69,42	0,46	1,69	1,26	17,55	94,15
185	7	100,1—106,5	2,55	44,00	5,85	0,10	—	46,21	98,71
171	5	38,2—40,2	1,83	96,23	0,38	0,08	—	0,73	99,25

Полученные данные заслуживают, как нам кажется, внимания и позволяют ставить вопрос о более детальном изучении соляных отложений месторождения Туз-Таг с точки зрения выявления залежей калийных, магниевых и других солей морского типа.

Институт общей и неорганической химии
им. Н. С. Курнакова
Академии наук СССР

Поступило
5 IX 1957

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

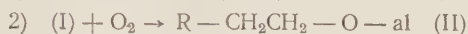
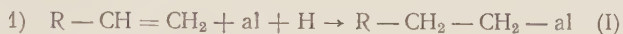
¹ Б. К. Шишкин, Очерки Урянхайского края, Томск, 1914. ² В. М. Левченко, Зап. Гос. гидр. инст., 12 (1935). ³ Э. М. Мурзаев, Монгольская Народная Республика, 1952. ⁴ А. И. Левенко, ДАН, 75, № 2, 263 (1950). ⁵ И. Н. Лепешков, В. К. Соловьев, Н. Н. Смирнова, Изв. Сект. физ.-хим. анализа, Изд. АН СССР, 27 (1956). ⁶ А. И. Левенко, Изв. АН СССР, сер. геол., № 3 (1955).

А. М. СЛАДКОВ, В. А. МАРКЕВИЧ, И. А. ЯВИЧ, Л. К. ЛУНЕВА и В. Н. ЧЕРНОВ

ПОЛУЧЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ПЕРВИЧНЫХ СПИРТОВ ЧЕРЕЗ АЛЮМИНИЙОРГАНИЧЕСКИЕ СОЕДИНЕНИЯ

(Представлено академиком Б. А. Казанским 27 XII 1957)

В связи с появлением в литературе (¹) указания о возможности получения спиртов через органические соединения алюминия нами исследовался комплекс реакций, позволяющих превращать α -олефины в первичные спирты по схемам:



Реакция 1 проводилась нами на примерах 2-метилпентена-1 и 2-этилгексена-1, которые были приготовлены димеризацией пропилена и *n*-бутилена. Полученные из этих олефинов алюминийтриалкилы, а также синтезированный другим способом триэтилалюминий подвергались окислению воздухом в алкоголяты, гидролизовавшиеся в соответствующие спирты. Специально поставленным опытом по окислению тридецилалюминия при низкой температуре было показано, что реакция проходит через стадию образования перекисного соединения, которое, по-видимому, в результате внутримолекулярной перегруппировки или взаимодействия с алюминийалкилом превращается в алкоголят алюминия:



Результаты исследования показали, что спирты могут быть получены через алюминийалкилы сравнительно просто и с достаточно высокими выходами (60—65%).

В качестве побочных продуктов на стадии получения алюминийтриалкилов всегда образуются продукты гидрирования олефинов. Так, из 2-метилпентена-1 образуется 2-метилпентан, из 2-этилгексена-1—2-этилгексан. Гидрирование имеет место, по-видимому, вследствие присутствия в активном алюминии мелкодисперсного железа, играющего роль специфического катализатора типа скелетных металлов 8-й группы периодической системы элементов. Содержание железа в некоторых образцах алюминия составляло 12—15%.

При димеризации бутена-1 было найдено, что необходимая температура реакции значительно выше (на 100°), чем при димеризации пропилена.

Предварительные результаты анализа абгаза после проведения димеризации показали, что бутен-2- в реакцию практически не вступает. Наряду с 2-этилгексеном-1 всегда имеет место образование гексена-1 (из бутилена и триэтилалюминия) и 2-метилпентена-1 (из пропилена, содержащегося в технической бутиленовой фракции). Несмотря на наличие этих побочных продуктов, выход димера бутена-1 весьма высок (до 90% от теоретического).

Исходные продукты. 2-метилпентен-1 был получен димеризацией пропилена в присутствии триэтилалюминия по К. Циглеру⁽²⁾. Выход продукта с т. кип. 62—62,5°/760 мм 90 % от теоретического; $n_D^{20} = 1,3920$; $d_4^{20} = 0,6793$; лит. данные⁽³⁾: т. кип. 61,5—62°/760 мм; $n_D^{20} = 1,3921$; $d_4^{20} = 0,6817$. 2-этилгексен-1 был получен димеризацией бутена-1. Тридецилалюминий был синтезирован реакцией обмена между дидецилртутью и металлическим алюминием⁽⁴⁾. Триэтилалюминий был приготовлен из йодистого этила и магнийалюминиевого сплава по видоизмененной методике, описанной в американском патенте⁽⁵⁾. Активный алюминий применялся в виде суспензии в бензине (95—100°) со средним размером частиц 1—5 μ .*

Получение 2-этилгексена-1. В автоклав емкостью 1 л, снабженный мешалкой, манометром и электрообогревом, загружается 360 г технической бутиленовой фракции, содержащей ~40 % бутена-1 и 200—250 г лигроина (т. кип. 150—220°), в котором растворено 5—10 г триэтилалюминия. Содержимое автоклава нагревается при перемешивании до 280—295°. При достижении этой температуры начинается падение давления, которое продолжается в течение 6 час. После прекращения падения давления автоклав охлаждается и выгруженные продукты реакции подвергаются перегонке. В результате перегонки получается 109 г 2-этилгексена-1 (90 % от теоретического) с т. кип. 118—119°/760 мм, $n_D^{18} = 1,4150$; $d_4^{18} = 0,7270$; MR выч. 38,68; MR найд. 38,65. Лит. данные⁽⁶⁾: т. кип. 120°/760 мм, $d_4^{20} = 0,7270$; $n_D^{20} = 1,4157$.

Синтез триэтилалюминия. В четырехгорлую колбу, снабженную мешалкой, обратным холодильником, капельной воронкой и газс подводящей трубкой, помещают 65 г растертого в порошок сплава, содержащего стехиометрические количества магния и алюминия. Реакцию проводят в слабом токе сухого азота, освобожденного от кислорода. Содержимое колбы нагревают на масляной бане до 70—80° и вводят при этой температуре 2—5 мл йодистого этила для инициирования реакции. Реакция начинается обычно сразу. После того как весь йодистый этил войдет в реакцию, что заметно по исчезновению капель, стекающих с холодильника в колбу, постепенно, порциями по 10—15 мл, прибавляют еще 300 г йодистого этила. Каждая следующая порция йодистого этила прибавляется после вступления в реакцию предыдущей порции.

Когда весь йодистый этил прибавлен, реакционную смесь продолжают нагревать в течение часа. Колбу охлаждают в токе азота, прибавляют минеральное масло (например, марки ВМ-4) и при пониженном давлении отгоняют из реакционной колбы триэтилалюминий, заменив мешалку с ртутным затвором насадкой Вюрца. Выход триэтилалюминия 80 % от теоретического, считая на йодистый этил.

Получение высших алюминийтриалкилов. В автоклав загружается 2 моля 2-метилпентена-1 или 2-этилгексена-1 и 2-кратный избыток суспензии алюминия в бензине, активированного 2—5 % триэтилалюминия. Реакционная смесь нагревается до 120—130°, и при этой температуре в автоклав вводится сухой, освобожденный от кислорода водород до давления 50—70 атм. По мере падения давления нагнетается следующая порция водорода, пока давление не перестает падать. Реакционная масса перемешивается еще в течение часа, затем автоклав охлаждается, и продукты реакции выгружаются в инертной атмосфере.

Окисление высших алюминийтриалкилов и гидролиз алколюлятов. Реакционная масса от предыдущего опыта декантируется с осадка и переносится в коническую колбу, снабжен-

* Пользуемся случаем выразить благодарность А. Ф. Жигачу за предоставление нам образцов активного алюминия.

ную мешалкой, обратным холодильником, термометром и подводящей воздух трубкой, доходящей почти до дна колбы.

При быстром перемешивании пропускают ток воздуха с такой скоростью, чтобы температура не поднималась выше $65-70^{\circ}$. Воздух пропускают непрерывно до падения температуры до 30° , после чего пропускают в течение часа кислород; при этом температура вначале поднимается до $50-60^{\circ}$, затем падает. После окончательного падения температуры прекращают подачу кислорода, заменяют трубку для ввода воздуха капельной воронкой, через которую вначале по каплям, а затем большими порциями прибавляют разбавленную (10—20%) соляную кислоту. После окончания гидролиза отделяют верхний масляный слой, сушат его над безводным поташом и перегоняют.

Из 2-метилпентена-1 получают 2-метилпентанол-1 (выход 60% от теоретического, считая на 2-метилпентен-1, и 54% от теоретического, считая на пропилен) с т. кип. $145-147^{\circ}/744$ мм, $n_D^{21} = 1,4171$; $d_4^{21} = 0,8224$; лит. данные (^{7,8}): т. кип. $148^{\circ}/762$ мм; $n_D^{20} = 1,4182$; $d_4^{20} = 0,8263$; *MR* найд 31,24, *MR* выч. 31,43.

Соответственно, из 2-этилгексена-1 получают 2-этилгексанол-1 (выход, считая на бутен-1, 58%, считая на этилгексен 65% от теоретического) с т. кип. $183-184^{\circ}/760$ мм, $n_D^{18} = 1,4310$, $d_4^{18} = 0,8344$; лит. данные (⁹): т. кип. $184,2-185^{\circ}/760$ мм; $n_D^{20} = 1,4313$; $d_4^{20} = 0,8324$.

Окисление триэтилалюминия и гидролиз этилата алюминия. Реакция проводится при охлаждении реакционной массы до -15° . Воздух продувается вначале с такой скоростью, чтобы температура не поднималась выше -5° , затем скорость пропускания воздуха несколько увеличивается, и окисление продолжается в течение часа при комнатной температуре. Окисление заканчивается при нагревании реакционной массы до $40-50^{\circ}$ (2 часа).

Продукты реакции гидролизуются, как указывалось выше. Перегонкой на колонке было выделено 20,3 г этилового спирта в виде азеотропа с водой (т. кип. $78^{\circ}/756$ мм). Выход этилового спирта 80% от теоретического.

Окисление тридецилалюминия. 10% раствор тридецилалюминия в изопентане окисляется пропусканием кислорода при температуре -70° в течение 5 час. Реакционная смесь была вылита при энергичном перемешивании в 10% водный раствор едкого натра при -10° . Водный (щелочной) слой обрабатывался до насыщения двуокисью углерода, затем водный слой экстрагировался эфиром. Эфирный раствор давал отчетливую реакцию на содержание гидроперекисей (йодометрическое определение).

Научно-исследовательский институт
синтетических спиртов и органических продуктов

Поступило
24 XII 1957

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

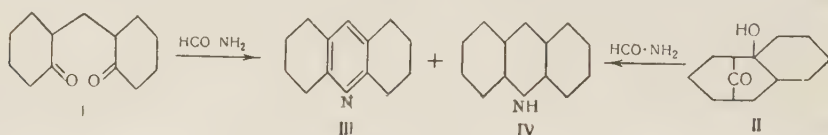
¹ K. Ziegler, F. Kupp, K. Zosel, *Angew. Chem.*, **67**, 425 (1955). ² K. Ziegler, *Angew. Chem.*, **64**, 323 (1952). ³ R. Schmitt, A. Boord, *J. Am. Chem. Soc.*, **54**, 754 (1932). ⁴ А. М. Сладков, И. Я. Явич, Л. К. Лунева, Труды НИИСС, Сборн. 1, 66 (1958). ⁵ K. Ziegler, K. Nagel, *Ам. пат.* 2774127, 1956; *Chem. Abstr.*, **51**, 460 (1957). ⁶ Р. Д. Оболенцев, Физические константы углеводородов, жидких топлив и масел, 1953, стр. 344. ⁷ L. Bouveault, L. Blanc, *Герм. пат.* 164294, 1905; *Chem. Zbl.*, **2**, 1700 (1905). ⁸ A. Skita, *Ber.*, **48**, 1492 (1915). ⁹ F. Broich, H. Reindel, R. Ströbel, K. Wiedemann, *пат. ФРГ* I 003702, 7 III 1957 г. *Chem. Zbl.*, **128**, 11150 (1957).

М. Н. ТИЛИЧЕНКО и В. И. ВЫСОЦКИЙ

ДЕЙСТВИЕ ФОРМАМИДА НА ИЗОМЕРНЫЕ МЕТИЛЕНДИЦИКЛОГЕКСАНОН И ТРИЦИКЛОГЕКСАНОЛОН

(Представлено академиком Б. А. Қазанским 23 XII 1957)

Действуя на недавно описанные метилендициклогексанон (I) ^(1,2) и изомерный ему трициклогексанолон (II) ⁽¹⁾ формамидом в условиях реакции Лейкарта, мы в обоих случаях получили одни и те же соединения, а именно: симм-октагидроакридин (III) и пергидроакридин (IV):



Данный факт свидетельствует о том, что в условиях реакции II изомеризуется в I:



и процесс при этом протекает с достаточной скоростью (в противном случае в качестве основных продуктов реакции получались бы продукты гидроаминирования II).

Установленная реакция интересна также в препаративном отношении: она протекает довольно гладко и с хорошим выходом (~80%) оснований и является легкодоступной как в отношении техники выполнения, так и в смысле исходных материалов. Это выгодно отличает ее от ранее известных методов получения этих оснований ⁽³⁻⁵⁾.

Наконец, следует отметить, что это — первый пример приложения реакции Лейкарта к алициклическим 1,5-дикетонам. Ранее реакция Лейкарта осуществлялась на нескольких примерах 1,5-дикетонов алифатического и ариалифатического рядов ^(6, 7).

Экспериментальная часть

Опыты с дикетоном [I] и кетоном (II) проводились в совершенно одинаковых условиях. Раствор одного из указанных соединений (1 мол.) в формамиде * (12 мол.) нагревался в колбе с обратным воздушным холодильником при 155—170° (термометр в смеси) до прекращения выделения CO₂ (~4 час.). Горячий раствор выливался затем в 5-6-кратный объем ~10% водного раствора едкого натра и кипятился на сетке около 2 час. После охлаждения отделившееся масло извлекалось бензолом или эфиром.

* Формамид готовился по ⁽⁸⁾.

Экстракт высушивался прокаленным сульфатом магния. Остаток после удаления растворителя перегонялся в вакууме:

52% отходило при 98—105°/2,5 мм (1-я фракция)

14% отходило при 113—116°/0,5 мм (2-я фракция)

33,5% оставалось в перегонной колбе; этот остаток быстро закристаллизовывался.

Симм-октагидроакридин ($C_{13}H_{17}N$). Закристаллизовавшийся остаток после отжата на глиняной пластинке и перекристаллизации из петролейного эфира имеет постоянную т. пл. 69,5°. Литературные данные: 69° (³, ⁴); 73,5—74° (⁵); 71° (⁹); 68—70° (¹). Проба смешения его с эталонным образцом симм-октагидроакридина, приготовленная по способу (¹), депрессии не дает.

Найдено %: N 7,75; M 189.

$C_{13}H_{17}N$. Вычислено %: N 7,50; M 187

Пикрат — т. пл. 197,5—199° (из спирта), проба смешения с пикратом эталонного образца депрессии не дает.

Пергидроакридин ($C_{13}H_{23}N$). Дистиллат (обе фракции) кристаллизуется уже при отгонке. После отжата на глиняной пластинке и перекристаллизации из петролейного эфира кристаллы — в виде белых иголочек — имеют постоянную т. пл. 87—88,5°. Литературные данные для пергидроакридина: 80° (³), 91° (⁵).

Найдено %: C 80,60; 80,57; H 11,90; 12,10; N 7,18; 7,26; M 192; 189

$C_{13}H_{23}N$. Вычислено %: C 80,82; H 11,91; N 7,25; M 193

Пикрат — желтые игольчатые кристаллы, т. пл. 179—181° (из спирта).

Ацетилпергидроакридин образуется при упаривании смеси 0,7 г основания с 1 мл уксусного ангидрида на кипящей водяной бане в вакууме. Остаток (0,45 г) закристаллизовывается. Бесцветные четырех- и шестиугольные пластинки (из спирта) при нагревании в капилляре разлагаются, не плавясь, в интервале 150—160°.

Найдено %: CH_3CO 17,73

$C_{13}H_{22}NCOCH_3$. Вычислено %: CH_3CO 18,30

Гидрохлорид пергидроакридина легко образуется при действии на основание концентрированной соляной кислоты. Белые игольчатые кристаллы (из спирта) мало растворяются в воде и в холодном спирте, не растворяются в бензоле. При нагревании в капилляре разлагаются при 220—230°, не плавясь.

Найдено %: Cl 15,30

$C_{13}H_{23}NHCl$. Вычислено %: Cl 15,47

Восстановление октагидроакридина в пергидроакридин. Полученный октагидроакридин очень гладко восстанавливается натрием и абс. спиртом в присутствии каталитических количеств (~ 3% от взятого основания) формиата никеля в пергидроакридин. Полученный таким путем пергидроакридин был идентичен (проба смешения) с описанным выше.

В отсутствие формиата никеля мы не могли получить хороших результатов в отношении выхода пергидроакридина.

Саратовский государственный университет
им. Н. Г. Чернышевского

Поступило
27 VI 1957

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ М. Н. Тиличенко, Ежегодн. Саратовск. унив., 1954. ² J. Colonge, Bull. Soc. Chim., № 2, 250 (1955). ³ J. Braun, A. Petzold, A. Schultheiss, Ber., 56, 1347 (1923). ⁴ А. Е. Чичибабин, Bull. Soc. Chim., (5), 6, 522 (1939). ⁵ H. A. D. zins, H. L. Coonradt, J. Am. Chem. Soc., 63, 1563 (1941). ⁶ N. Sugimoto, Chem. Abstr., 45, 2862 (1951). ⁷ F. Chubb, A. S. Hay, R. B. Sandin, J. Am. Chem. Soc., 75, 6042 (1953). ⁸ А. Н. Кост, А. П. Терентьева, Г. А. Швехгеймер, Изв. АН СССР, ОХН, 1951, 150. ⁹ M. S. Gill, K. B. James, F. Lions, K. T. Potts, J. Am. Chem. Soc., 74, 4923 (1952).

Академик А. В. ТОПЧИЕВ, Е. С. ПОКРОВСКАЯ и Т. Г. СТЕПАНЦЕВА

СИНТЕЗ АЛКИЛИНДАНОВ

Получение в чистом виде углеводородов, по температуре кипения соответствующих керосиновым и масляным фракциям нефти, и всестороннее изучение их свойств является необходимым предварительным этапом в сложной проблеме исследования углеводородного состава этих нефтяных фракций. Из числа ароматических углеводородов, присутствие которых считается возможным в средних нефтяных фракциях, углеводороды ряда индана изучены еще совершенно недостаточно.

В литературе имеется описание отдельных алкилинданов, полученных преимущественно путем замыкания пятичленного кольца, но систематический синтез и изучение указанных углеводородов находится еще только в начальной стадии. К подобным систематическим исследованиям можно отнести, пожалуй, только работу Энтель и соавторов ⁽¹⁾, получивших не-которые метил- и диметилинданы путем замыкания пятичленного кольца и определивших помимо обычных свойств указанных углеводородов также их спектры поглощения в инфракрасной и ультрафиолетовой областях.

В целях пополнения сведений о свойствах индановых углеводородов получения препаратов для спектральных исследований нами предпринят синтез углеводородов этого ряда, в первую очередь алкилинданов с алифатическими заместителями в ароматическом кольце.

До настоящего времени реакция алкилирования индана при синтезе гомологов этого углеводорода была использована лишь в нескольких случаях и описана в немногих работах. Так, Кетц и соавторы провели алкилирование индана этиленом, пропиленом и изопропиленовым спиртом в присутствии $Al_2O_3 \cdot SiO_2$ под давлением и при высокой температуре (250—300°) и получили при этом этилиндан, изопропилиндан и продукты уплотнения индана ⁽²⁾. Бутилиндан был синтезирован путем алкилирования индана третичным хлористым бутилом в присутствии хлористого алюминия. Однако работа эта была проведена не с целью изучения свойств углеводорода, а для получения его нитропроизводных, и авторы приводят только температуры кипения и застывания третичного бутилиндана ⁽³⁾.

Очень гладко и с хорошим выходом проходило взаимодействие с инданом циклогексена в присутствии хлористого алюминия при атмосферном давлении и температуре около 5°. В этих условиях были синтезированы моно-, ди- и трициклогексиллинданы ⁽⁴⁾. Моно- и дициклопентиллинданы были получены таким же путем исходя из индана и циклопентена ⁽⁵⁾.

В нашей работе для получения исходного продукта, индана, было произведено гидрирование индена над скелетным никелевым катализатором при обыкновенной температуре и начальном давлении водорода 150—120 атм. ⁽⁶⁾. Индан после разгонки над металлическим натрием имел т. кип. 177°, $n_D^{20} = 1,5390$, $d_4^{20} = 0,9640$, что соответствует литературным данным: т. кип. 176,7°, $n_D^{25} 1,5355$ и $d_4^{25} = 0,9604$ ⁽¹⁾.

Поскольку алкилирование индана циклоолефинами в присутствии хлористого алюминия проходило гладко с образованием только продуктов за-

мещения в ароматическом ядре (⁴, ⁵), то этот метод синтеза и был нами применен для получения гомологов индана с боковыми цепями алифатического ряда.

Алкилирование индана олефинами: пропиленом, бутиленом-1 и триметилэтиленом — проводилось в стеклянном реакторе при постоянном перемешивании и охлаждении льдом. Газ пропусклся со скоростью 2—4 л/час; триметилэтилен прибавлялся по каплям; хлористый алюминий, в количестве $\frac{1}{2}$ — $\frac{1}{4}$ от веса олефина, прибавлялся по частям. Образующийся в небольшом количестве слой комплекса углеводородов с хлористым алюминием отделялся от основного слоя продуктов реакции, которые после обычной обработки несколько раз разгонялись на колонке в 12 т. т. Приведенные выходы продуктов реакции рассчитаны на введенный олефин.

С применением описанного метода из индана и пропилена, взятых в молекулярных соотношениях 1 : 0,5 и 1 : 1,5 (при общем количестве индана 300 г), были получены с выходом ~50% на пропилен продукты реакции, из которых путем многократной фракционировки были выделены фракции: одна, с т. кип. 62°/2 мм, — соответствующая изопропилиндану C₁₂H₁₆ (анализ); другая с т. кип. 83—85°/2 мм, — соответствующая диизопропилиндану C₁₅H₂₂ (анализ). Свойства этих углеводородов, так же как и всех описанных ниже, приведены в табл. 1. В результате алкилирования пропиленом широкой фракции моноизопропилиндана, с т. кип. 228—233°, был получен твердый триизопропилиндан C₁₈H₂₈ (анализ) и его жидкий изомер с т. кип. 276—280°, т. заст. ниже — 65°, $d_4^{20} = 0,9202$ и $n_D^{20} = 1,5220$.

В аналогичных условиях было проведено алкилирование индана (общего количества 950 г) эквимолекулярным количеством бутилена-1. Из продуктов реакции были выделены втор.-бутилиндан C₁₃H₁₈ (анализ) с т. кип. 68—69°/2 мм и ди-втор.-бутилиндан C₁₇H₂₆ (анализ) с т. кип. 121—122°/2 мм.

Таблица 1

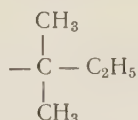
Углеводород	Т. кип., °С/мм рт. ст.	Т. заст., °С	d_4^{20}	n_D^{20}	$\frac{n_F - n_e}{d} \cdot 10^4$	Вязкость, сст			Анилин. точка (макс.), °С
						при 20°	при 50°	при 100°	
Изопропилиндан C ₁₂ H ₁₆	62/2	—65	0,9347	1,5240	164,6	2,9	1,6	0,9	Ниже—10
Диизопропилиндан C ₁₅ H ₂₂	230/751 83—85/2	Не заст. —44	0,9210	1,5183	—	7,6	3,1	1,3	Ниже—10
Триизопропилиндан C ₁₈ H ₂₈	255—256/751	Стекло	—	—	—	—	—	—	—
Втор.-бутилиндан C ₁₃ H ₁₈	108—109/2 68—69/2	45—46 —65	0,9252	1,5213	157,5	—	—	—	Ниже—10
Ди-втор.-бутилиндан C ₁₇ H ₂₆	245/753 122—123/2	Не заст. —50	0,9068	1,5138	147,4	—	—	—	+0,5
Амилиндан* C ₁₄ H ₂₀	—	Стекло	—	—	—	—	—	—	—
Амилиндан** C ₁₄ H ₂₀	256—257/744	—56	0,9355	1,5245	151,4	6,8	2,9	1,3	Ниже—10
Амилиндан** C ₁₄ H ₂₀	257—258/744	—55	0,9350	1,5245	—	—	—	—	—
Амилиндан** C ₁₄ H ₂₀	81—82/2 255—257/744	—45 Стекло	0,9324	1,5230	—	—	—	—	—

* Получен с BF₃·H₃PO₄ в качестве катализатора.

** Получен с AlCl₃ в качестве катализатора.

Для синтеза амилиндана был использован триметилэтилен, полученный дегидратацией диметилэтилкарбинола. Реакция алкилирования проводилась при соотношении реагирующих веществ 3 : 1, как в присутствии хлористого алюминия, при этом исходили из 300 г индана, так и с катализатором BF₃·H₃PO₄ (?) с 250 г индана. В первом случае была выделена с выходом ~20% одна фракция, а во втором с выходом ~40% две фракции амилиндана C₁₄H₂₀ (анализ), несколько, впрочем очень мало, различающихся по

свойствам (табл. 1). В первом случае высококипящие продукты реакции содержали преимущественно продукты уплотнения индана; диамилиндана они не содержали. Высококипящие продукты реакции с $\text{BF}_3 \cdot \text{H}_3\text{PO}_4$ представляли собой смолистую массу и исследованию не подвергались. Поскольку алкилирование проводилось триметилэтиленом, то боковая цепь амила должна иметь строение:



Из числа приведенных в табл. 1 углеводородов в литературе описано только изопропилиндан, представляющий собой смесь изомеров 4- и 5-изопропилинданов, константы которого ⁽²⁾ почти полностью совпадают со свойствами полученного нами углеводорода. Все остальные описанные нами гомологи индана получены нами впервые. Плотности и показатели преломления синтезированных углеводородов лежат в пределах обычных для алкилинданов ($d_4^{20}=0,92-0,93$ и $n_D^{20}=1,51-1,52$); анилиновые точки всех углеводородов, кроме дибутилиндана, лежат ниже 0° , что обычно для ароматических углеводородов невысокого молекулярного веса. Удельная дисперсия правильно понижается по мере увеличения числа атомов углерода в боковых цепях.

В работе принимала участие А. П. Богомолова.

Институт нефти
Академии наук СССР

Поступило
30 VIII 1957

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ J. Entel, C. H. Reoof, H. C. Howard, Anal. Chem., **26**, № 3, 612 (1954).
- ² W. M. Kutz, J. E. Nikels, J. J. McGovern, B. B. Corson, J. Am. Chem. Soc., **70**, 4026 (1948).
- ³ M. S. Carpenter, W. M. Easter, J. Org. Chem., **19**, 96 (1954).
- ⁴ Е. С. Покровская, Т. Г. Степанцева, ДАН, **55**, № 9, 841 (1947).
- ⁵ P. Sagniant, A. Delusarche, G. Chatelus, C. R., **224**, 1064 (1947).
- ⁶ Б. А. Казанский, А. Ф. Платэ, Е. М. Терентьева, Синтез органических соединений, Сборн. 2, Изд. АН СССР, 1952, стр. 70.
- ⁷ А. В. Толчиев, М. В. Курашов, Я. М. Паушкин, ДАН, **93**, 839 (1953).

А. Н. ХЛАПОВА

ФАЗОВЫЕ ПРЕВРАЩЕНИЯ В СИСТЕМЕ СУЛЬФАТ — КАРБОНАТ НАТРИЯ

(Представлено академиком И. И. Черняевым 31 XII 1957)

В отличие от (¹⁻⁵), настоящее исследование сплавов сульфата с карбонатом натрия проводилось на одних и тех же образцах одновременно дифференциально-термографическим, рентгенографическим и кристаллооптическим методами фазового анализа. Изучению подвергались сплавы через 1—5 дней после их изготовления, а также после хранения около 1—2 мес. без доступа влаги воздуха и более года открыто на воздухе в лабораторных условиях.

Полученные результаты представлены на рис. 1 и 2.

Из диаграммы состояния Na_2SO_4 — Na_2CO_3 (рис. 1) видно, что высокотемпературный твердый раствор сульфат — карбонат натрия, кристаллизующийся из расплава солей, при охлаждении претерпевает ряд фазовых переходов. Процесс фазовых превращений по температуре в данной системе обуславливается прежде всего наличием полиморфизма у сульфата и карбоната натрия (⁶⁻¹⁰). Так, непрерывный ряд δ -твердых растворов, образующийся между высокотемпературными δ -модификациями исходных компонентов (δ - Na_2SO_4 (^{6,7}) и δ - Na_2CO_3 (⁶)) около 600° (температура $\delta \rightleftharpoons \gamma$ -полиморфных превращений чистых солей) в диапазоне всех концентраций превращается в неограниченный γ -твердый раствор, который образуется между γ - Na_2SO_4 (^{6,7,9}) и γ - Na_2CO_3 (^{8,10}).

γ -Твердый раствор, в зависимости от состава сплава, распадается при разных температурах по сложной кривой. В средней части диаграммы на этой кривой около 400° имеются два максимума, один из которых лежит при 66,3 мол. % Na_2SO_4 и отвечает образованию в твердом состоянии двойной соли состава $2\text{Na}_2\text{SO}_4 \cdot \text{Na}_2\text{CO}_3$ (гексагональный беркеит (¹¹)), а другой — при 25,0 мол. % Na_2SO_4 — соответствует образованию двойной соли состава $\text{Na}_2\text{SO}_4 \cdot 3\text{Na}_2\text{CO}_3$. Между этими химическими соединениями на базе гексагонального беркеита (¹¹) образуется фаза переменного состава (γ' -фаза), простирающаяся при обычных температурах в пределах ~от 13,0 до 75,0 мол. % Na_2CO_3 .

На основе β -модификации сульфата натрия (⁶), как показано на рис. 1, образуется ограниченный β -твердый раствор, из которого приблизительно при 130° выпадает третье химическое соединение сульфата с карбонатом натрия, состава $9\text{Na}_2\text{SO}_4 \cdot \text{Na}_2\text{CO}_3$ (ε -фаза). Эта двойная соль практически не дает твердых растворов со своими составными компонентами.

α' - и β' -фазы, расположенные в области, богатой Na_2CO_3 (рис. 1), являются ограниченными твердыми растворами сульфата натрия соответственно в α - и β -модификациях карбоната натрия (^{8,10}).

Рентгенографическая и кристаллооптическая характеристика низкотемпературных твердых фаз системы Na_2SO_4 — Na_2CO_3 даны в (¹¹).

Настоящим исследованием было установлено, что α -, β -, ε -, γ' - и α' -твердые фазы, а также двойные соли составов $9\text{Na}_2\text{SO}_4 \cdot \text{Na}_2\text{CO}_3$, $2\text{Na}_2\text{SO}_4 \cdot \text{Na}_2\text{CO}_3$ и $\text{Na}_2\text{SO}_4 \cdot 3\text{Na}_2\text{CO}_3$ (рис. 1), стабильные без доступа влаги, в при-

сутствии паров воды или в атмосферных условиях становятся неустойчивыми, метастабильными, вследствие того, что пары H_2O , химически взаимодействуя с двухкомпонентными сплавами сульфат—карбонат натрия, проявляют себя в данном случае как третий компонент системы. Поэтому все

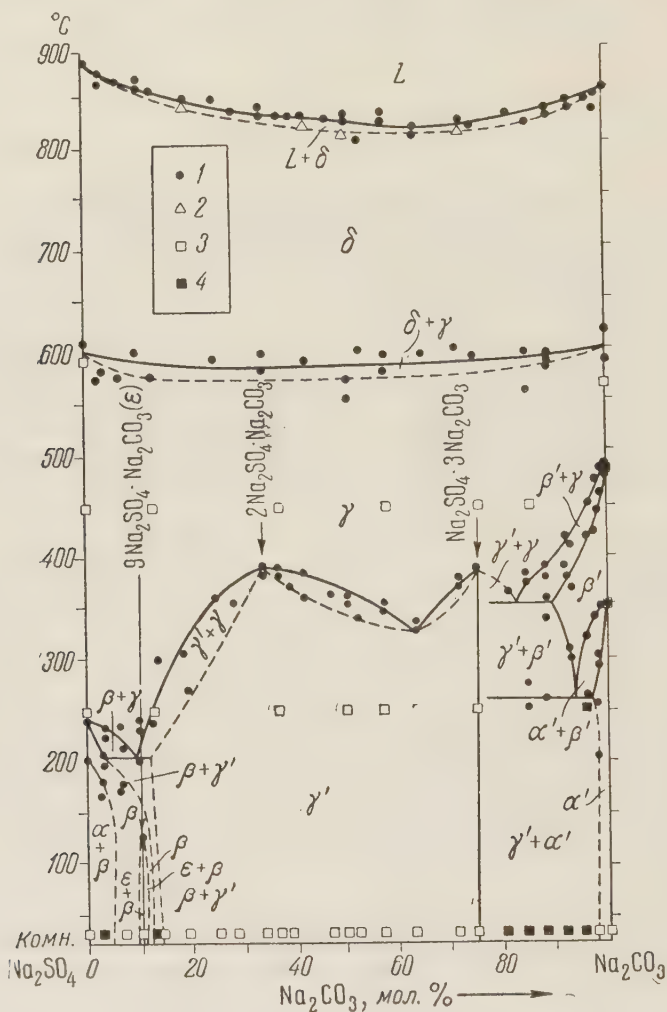


Рис. 1. Диаграмма фазового равновесия сплавов системы Na_2SO_4 — Na_2CO_3 , не подвергавшихся воздействию влаги после сплавления солей. Данные дифференциального термографического анализа (по кривым нагревания двух образцов): 1 — ликвидус, 2 — солидус. Данные рентгенографического анализа: 3 — однофазные, 4 — двухфазные; γ' -фаза, образующаяся на основе соединений $2\text{Na}_2\text{SO}_4 \cdot \text{Na}_2\text{CO}_3$ и $\text{Na}_2\text{SO}_4 \cdot 3\text{Na}_2\text{CO}_3$, простирается от 13,0 до 75,0 мол. % Na_2CO_3

низкотемпературные твердые фазы двойной системы Na_2SO_4 — Na_2CO_3 (рис. 1), стремясь к равновесию с H_2O , постепенно, по мере проникновения влаги в глубь кристаллов, перерождаются (в зависимости от состава сплава) как показано на рис. 2, в тенардит (T -фаза), ромбический беркеит (γ' -фаза) и моногидрат соды (χ -фаза), которые обычно образуются из пересыщенных водных растворов тройной системы Na_2SO_4 — Na_2CO_3 — H_2O (^{2, 6, 11, 12}).

В работах (^{6, 11}) сообщалось, что тенардит и ромбический беркеит содержат в своих кристаллах незначительное количество (доли вес. %) структурно связанной воды.

В результате настоящего исследования получены новые данные о фазовых превращениях в системе $\text{Na}_2\text{SO}_4\text{—Na}_2\text{CO}_3$ и вскрыта принципиальная разница в природе твердых фаз, образующихся между сульфатом и карбонатом натрия в расплаве и в водных растворах этих солей.

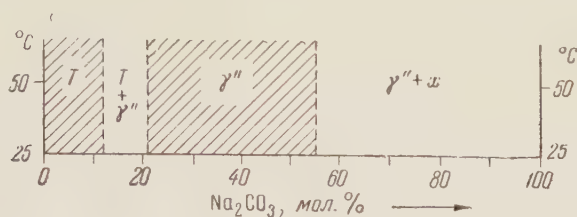


Рис. 2. Диаграмма фазового равновесия сплавов системы $\text{Na}_2\text{SO}_4\text{—Na}_2\text{CO}_3$ в присутствии паров воды и в атмосферных условиях: T — фаза со структурой тенардита, γ'' — фаза со структурой ромбического беркеита, x — фаза со структурой моногидрата соды

Установлено, что сплавы сульфат—карбонат натрия в присутствии паров воды и в атмосферных условиях претерпевают превращение из двухкомпонентного в трехкомпонентное состояние, а диаграмма фазового равновесия двойной системы $\text{Na}_2\text{SO}_4\text{—Na}_2\text{CO}_3$ (рис. 1) перерождается в диаграмму фазового равновесия тройной системы $\text{Na}_2\text{SO}_4\text{—Na}_2\text{CO}_3\text{—H}_2\text{O}$ (рис. 2).

Институт органической химии
им. Н. С. Курнакова
Академии наук СССР

Поступило
14 XII 1957

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Н. С. Курнаков, С. Ф. Жемчужный, ЖРФХО, 39, 122 (1907). ² Н. С. Курнаков, С. З. Макаров, Изв. Сект. физ.-хим. анал., 4, 307 (1930). ³ С. З. Макаров, С. Н. Красников, там же, 27, 268 (1956). ⁴ L. S. Ramsdell, Am. Mineral., 22, 213 (1937); 24, 109 (1939). ⁵ M. A. Bredig, J. Phys. Chem., 46, 747 (1942). ⁶ А. Н. Хлапова, ДАН, 105, № 3, 500 (1955). ⁷ А. Н. Хлапова, Журн. неорг. хим., 1, 2561 (1956). ⁸ А. Н. Хлапова, ДАН, 116, № 6, 979 (1957). ⁹ F. C. Kjařek, C. I. Ksanda, J. Phys. Chem., 34, 188 (1930). ¹⁰ J. Jaffray, T. Marglilip, C. R., 236, 1755 (1953). ¹¹ А. Н. Хлапова, Э. Е. Буровая, Журн. неорг. хим., 2, 1864 (1957). ¹² W. C. Schroeder, A. A. Berk, A. Gabriel, J. Am. Chem. Soc., 58, 843 (1936).

Б. ДОГАДКИН, К. ПЕЧКОВСКАЯ и Э. ГОЛЬДМАН

О СТРУКТУРЕ И УСИЛИВАЮЩЕМ ДЕЙСТВИИ КОЛЛОИДНОЙ КРЕМНЕКИСЛОТЫ КАК НАПОЛНИТЕЛЯ СИНТЕТИЧЕСКОГО КАУЧУКА

(Представлено академиком П. А. Ребиндером 25 XII 1957)

Вопросу о взаимодействии каучука с наполнителем посвящены многочисленные исследования. Тем не менее, многие существенные стороны этого процесса остаются еще невыясненными. В частности, мало исследовано влияние структуры наполнителя и характера его распределения на усиливающий эффект.

Было показано ⁽¹⁾, что активные сажи, способные усиливать каучук, образуют тиксотропные структуры, в которых в той или иной степени осуществляется контакт между частицами сажи (сетчатые структуры). Неусиливающие сажи образуют системы, в которых имеет место относительно ра-

Таблица 1

Характеристика образцов наполнителя	Сопротивл. разрыву, кг/см ²	Относит. удли., %	Остаточн. удли., %	Сопротивл. раздиру, кг/см
Активный	115,7	527	34,6	43,3
Средней активности	69,0	452	37,0	34,0
Неактивный	39,4	300	16,0	27,0

номерное распределение сажи в виде первичных или вторичных частиц в среде каучука. Таким образом, между характером распределения сажи и эффектом усиления существует взаимная связь.

Целью настоящего исследования было изучение характера распределения в натрий-бутадиеновом каучуке коллоидной

кремнекислоты как представителя нового класса усилителей, приобретающих в последнее время большое практическое значение.

Выбор объекта исследования определялся в данном случае еще и тем, что из одного и того же сырья и одним и тем же методом, меняя лишь условия технологического процесса, можно получать образцы коллоидной кремнекислоты, существенно различные по усиливающему эффекту. Отсюда появляется возможность сопоставления активного и неактивного наполнителей, значительно более родственных между собой, чем все ранее исследованные образцы углеродных саж.

Для проведения исследования была изготовлена серия образцов коллоидной кремнекислоты, обладающих высоким, средним и малым усиливающим действием в резинах из натрий-бутадиенового каучука (табл. 1). Химический состав этих образцов был практически одинаков. Также несущественно различались они по удельной поверхности, pH и ряду адсорбционных характеристик (адсорбция толуола, стеариновой кислоты, каучука) (табл. 2).

Однако резиновые смеси, изготовленные на основе натрий-бутадиенового каучука и содержащие исследуемые образцы, оказались существенно различными в отношении как структуры смеси, так и физико-механических свойств вулканизатов.

Для изучения структуры смеси была использована легкая растворимая

мость коллоидной кремнекислоты в разбавленном растворе едкого натра, в противоположность каучуку, не растворяющемуся в нем. Подвергая смесь кипячению с таким раствором, мы измеряли затем количество перешедшего в раствор наполнителя. Оказалось, что чем активнее коллоидная кремнекислота, тем быстрее и полнее удается извлечь ее из смеси с каучуком. По аналогии с бентонитовыми ⁽²⁾ и сажевыми ⁽³⁾ смесями, можно предположить, что частицы более активной коллоидной кремнекислоты обладают способностью к образованию цепочечных структур, наличие которых позволяет растворителю легко проникнуть в смесь, а образовавшемуся раствору силиката так же легко удалиться из нее. При отсутствии растворения предполагается, что более или менее толстая каучуковая прослойка между изолированными частицами кремнекислоты препятствует диффузии растворителя к частицам наполнителя. Существенно отметить, что по степени растворения в среде водного раствора NaOH активные и неактивные образцы одинаковы.

Таблица 2

Характеристика образцов наполнителя	Уд. поверхн., м ² /г	Адсорб. толуола, ммоль/г	Адсорб. серной кисл., ммоль/г	Адс., каучука, г/г	pH
Активный	61,8	9,4	0,47	0,13	8,7
Средней активности	—	8,8	—	—	8,4
Неактивный	50,3	7,7	0,56	0,108	10,0

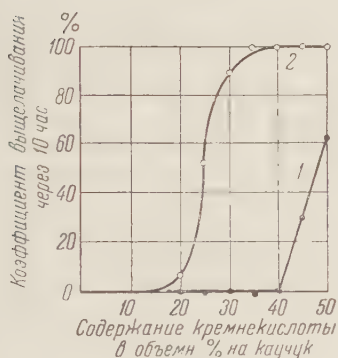


Рис. 1. Зависимость между наполнением и коэффициентом выщелачиваемости активной и неактивной кремнекислоты из трехкомпонентных смесей, содержащих неактивную (1) и активную (2) кремнекислоту

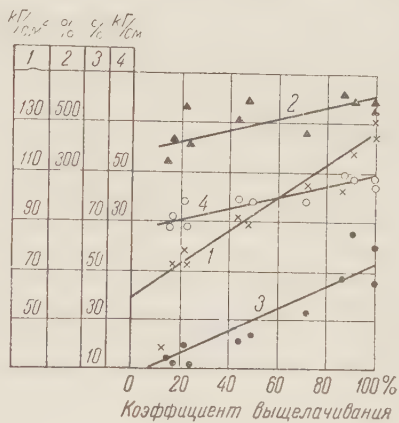


Рис. 2. Зависимость между коэффициентом выщелачивания и физико-механическими свойствами вулканизатов. 1 — сопротивление разрыву, 2 — относительное удлинение, 3 — остаточное удлинение, 4 — сопротивление разрыву

Для характеристики степени структурирования наполнителя в смеси применялся «коэффициент выщелачивания», характеризующий долю перешедшего в щелочной раствор наполнителя от общего содержания его в смеси.

На рис. 1 показана зависимость коэффициента выщелачивания от степени наполнения для образцов коллоидной кремнекислоты с наибольшей усиливающей способностью (активный образец) и с наименьшей усиливающей способностью (неактивный образец). Как видно, активная кремнекислота выщелачивается полностью при таких степенях наполнения (около 35 объемов на 100 вес. частей каучука), при которых неактивный образец в тех же условиях практически не растворяется. Это подтверждает различие в характере распределения двух исследованных образцов кремнекислоты в атрий-бутадиеновом каучуке.

Интересно отметить, что после удаления активной кремнекислоты выщелачиванием оставшийся образец сырой резиновой смеси оказывается так же нерастворимым в органическом растворителе, как и до выщелачивания.

То обстоятельство, что активный образец выщелачивается из смеси значительно легче, чем неактивный, нельзя объяснить образованием различного

Таблица 3

Т-ра прокаливания, °С	П. п. п., %	Коэфф.ц. выщелач. через 10 час., %	Сопротивл. разрыву, кг/см ²	Относит. удлин., %	Остаточн. удлин., %	Сопротивл. раздиру, кг/см
—	—	100	111,5	448	30,8	39,3
400	10,5	91,0	115,6	626	54,0	50,9
600	12,4	12,5	52,8	494	17,0	17,7

количества геля каучук—наполнитель, так как тогда пришлось бы допустить, что активный образец связывает каучук в меньшей степени, чем неактивный, а это противоречит существующим представлениям о взаимодействии каучука с наполнителем.

Нам представляется, что полученные данные, так же как и результаты более ранних работ (1, 4, 5), свидетельствуют о том, что в структуре нерастворимого геля каучук — наполнитель, наряду со связями между каучуком и наполнителем (6, 7), существенное значение имеют поперечные связи между самими молекулами полимера.

Изучение физико-механических свойств вулканизатов, содержащих исследуемые образцы коллоидной кремнекислоты, показало, что чем выше коэффициент выщелачивания наполнителя из данной системы, тем выше прочностные характеристики вулканизата. Эти данные показаны на рис. 2.

Все испытанные образцы по степени активности можно разделить на три группы: а) неактивные образцы, для которых коэффициент выщелачивания меньше 25%; б) образцы средней активности, для которых коэффициент выщелачивания составляет 40—50%, и в) активные образцы, для которых коэффициент выщелачивания достигает 70—100%. В этом же порядке располагается значительное большинство исследованных образцов по физико-механическим показателям соответствующих вулканизатов.

Существенное понижение активности образца коллоидной кремнекислоты можно достигнуть путем нагревания его при температуре 600°. Эти результаты показаны в табл. 3.

Сравнительно низкая температура, при которой происходят наблюдаемые изменения, указывает на известную неустойчивость кристаллической решетки кремнекислоты, вероятно, связанную с условиями осаждения. При 600°, очевидно, происходит рекристаллизация, в результате которой составляющие его частицу элементарные кристаллики переходят в другую, более устойчивую кристаллическую форму: этот переход сопровождается потерей активности материала как усилителя каучука.

Неустойчивое состояние кристаллической решетки активного образца должно найти отражение в ряде свойств материала, в частности, в его отношении к растворителям. С этой целью мы исследовали кинетику растворения технической (активной и неактивной) и диализованной (активной и неактивной) коллоидной кремнекислоты в водном растворе едкого натра при различных температурах.

Как видно из рис. 3 и 4, технический активный образец растворяется в 1% растворе NaOH при всех исследованных температурах медленнее, чем неактивный. Наоборот, активный образец, очищенный электродиализом, растворяется быстрее, чем подвергнутый такой же очистке неактивный. Таким образом, примеси, адсорбированные на поверхности кремнекислоты, в большей степени тормозят растворение активной модификации, чем не-

активной. После удаления этих примесей путем электродиализа растворение активного образца, как мы и предполагали, приобретает большую скорость, чем растворение неактивного.

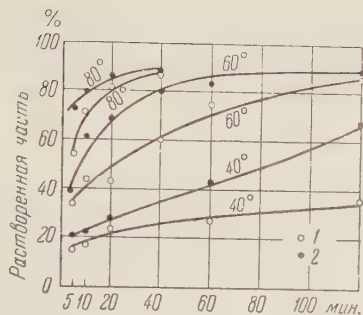


Рис. 3. Кинетика растворения технической кремнекислоты: 1 — активной, 2 — неактивной

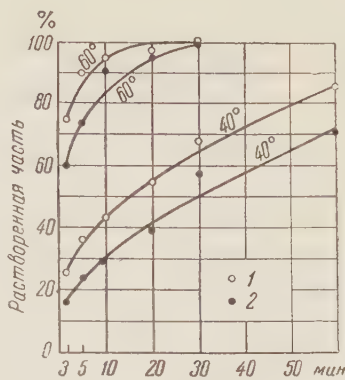


Рис. 4. Кинетика растворения диализованной кремнекислоты: 1 — активной, 2 — неактивной

Это различие в скоростях растворения диализованных продуктов одинакового химического состава указывает на различие в строении элементарной ячейки, менее устойчивой в случае активного образца. Последнее может быть связано с наличием искажений или дефектов в результате зажатия посторонних атомов или ионов в процессе осаждения кремнекислоты из растворов.

Научно-исследовательский институт
шинной промышленности

Поступило
12 XII 1957

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Б. Догадкин, М. Фельдштейн, Каучук и резина, № 12 (1939). ² Б. Догадкин, К. Печковская, Л. Черникина, Колл. журн., 8, 1—2, 31 (1946).
³ Б. Догадкин, К. Печковская, М. Дашевский, Колл. журн., 10, 5, 357 (1958). ⁴ F. Menadue, India-Rubb. J., 85, 689 (1933). ⁵ F. Endter, Kautschuk u. Gummi, 5, № 2, 17 (1952). ⁶ S. Polinchak et al., Rubb. Age, 70, 6, 754 (1952), V. Garten, Nature, 173, 997, № 4412 (1954).

Е. Л. ФРАНКЕВИЧ и В. Л. ТАЛЬРОЗЕ

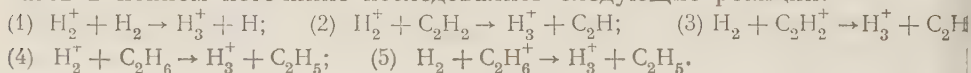
О СРОДСТВЕ К ПРОТОНУ ВОДОРОДА И ПРЕДЕЛЬНЫХ УГЛЕВОДОРОДОВ

(Представлено академиком В. Н. Кондратьевым 24 X 1957)

Сродство молекул к протону P является весьма существенной термодинамической постоянной. Между тем, прямые экспериментальные данные о сродстве к протону, получаемые методом электронного удара, были до недавнего времени известны только для ненасыщенных соединений.

Наличие положительного сродства водорода и метана к протону вытекает из существования стабильных ионов H_3^+ (1) и CH_5^+ (2). Относительно «ониевых» ионов гомологов метана в литературе нет сведений. В работе одного из авторов (3) было показано, что при столкновении молекулярных ионов этана, пропана, бутана с молекулами этих веществ соответствующих «ониевых» ионов не образуется. В этой работе, а также в работе Стивенсона и Шисслера (13) была оценена нижняя граница P_{H_2} . Гиршфельдером (4) Баркером и Эйрингом (5) был осуществлен теоретический расчет энергии иона H_3^+ . Симонсом и др. величина P_{H_2} была получена на основе расчетов Гиршфельдера из закона взаимодействия H^+ с H_2 , полученного в опытах по рассеянию протонов в водороде (6). В настоящем сообщении излагаются результаты опытов по определению сродства к протону водорода, метана, этана и пропана методом ионного удара, развитым авторами (7).

Опыты по обнаружению реакций, приводящих к образованию вторичных ионов H_3^+ , производились на масс-спектрометре МС-1а (8). Энергия ионизирующих электронов была равна 50 эв. В опытах с изменением давления газов в ионном источнике исследовались следующие реакции:



Показано, что добавление ацетилена в ионный источник, содержащий водород при давлении $\sim 10^{-4}$ мм рт. ст., не повышает выхода ионов H_3^+ . В этих условиях ионы H_3^+ образуются только в процессе (1). Однако добавление в ионный источник в аналогичных условиях этана повышает ток ионов H_3^+ , что свидетельствует о том, что, кроме (1), осуществляется по крайней мере один из процессов (4) или (5). Для оценки предельных значений сродства молекулы H_2 к протону авторами использовались следующие значения энергии диссоциации и потенциалов ионизации молекул: $D(H_2) = 103,2$ ккал/моль, $D(C_2H_5 - H) = 96$ ккал/моль (9), $D(C_2H - H) = 121$ ккал/моль (9), $I(H_2) = 15,43$ эв, $I(C_2H_2) = 11,43$ эв (10), $I(C_2H_6) = 11,76$ эв (10).

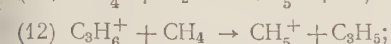
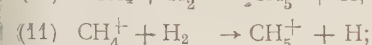
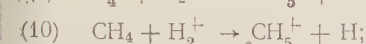
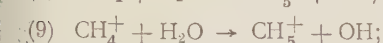
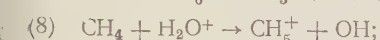
Так как, в соответствии с правилом, лежащим в основе метода ионного удара, тепловой эффект ионно-молекулярных реакций, обнаружимых масс-спектрометрически, положителен или равен нулю, а необнаружимых — отрицателен, то использование опытных сведений о реакциях (1)–(5) приведенных выше энергетических величин позволяет написать следующий ряд неравенств, определяющих пределы допустимых значений сродства к протону: 1) $P_{H_2} \geq 61$ ккал/моль; 2) $P_{H_2} < 79$ ккал/моль; 3) $P_{H_2} < 17$ ккал/моль; 4) $P_{H_2} \geq 54$ ккал/моль.

Неравенства 1) и 2) определяют наиболее узкий интервал возможных значений P_{H_2} : 61 ккал/моль $\leq P_{H_2} < 79$ ккал/моль. Беря среднее из двух

крайних возможных значений, получаем $P_{H_2} = 70 \pm 9$ ккал/моль. Интересно, что расчет этой величины на основании данных (4) и (5) и экспериментального значения $D_2(H_2)$ дает 81 и 77 ккал/моль, а опыты Симонса 69,2 ккал/моль.

Все дальнейшие опыты производились на специальном масс-спектрометре, обладающем повышенной чувствительностью и возможностью точно измерять потенциалы появления ионов (11). Для определения сродства к протону молекулы метана, исследовались следующие процессы, в которых

может образоваться ион CH_5^+ :



Реакция (6) была идентифицирована путем сравнения потенциалов появления ионов CH_4^+ и CH_5^+ . Соответствующие кривые появления показаны на рис. 1. При добавлении в ионный источник этана потенциал появления ионов CH_5^+ не изменяется. Это значит, что процесс (7) является эндотермичным.

Процессы (8) и (9) проверялись в опыте с повышением давления паров воды в ионном источнике. Ионизация производилась электронами с энергией 14 эв. При этом в ионизационной камере первичными были только ионы CH_4^+ и H_2O^+ . Увеличение давления паров воды не приводит к увеличению выхода ионов CH_5^+ . Ток ионов 17 а.е.м. остается постоянным и обусловлен изотопными ионами метана и вторичными ионами CH_5^+ , образующимися в процессе (6). Добавление водорода в ионный источник, содержащий метан, повышает выход ионов CH_5^+ (рис. 2). Это увеличение, очевидно, вызвано, по крайней мере, одним из процессов (10) или (11). Аналогичный опыт проводился при добавлении в ионный источник пропилена (рис. 3). Увеличение тока ионов CH_5^+ в этом случае связано по крайней мере с одним из процессов (12) или (13)*.

Вычисление предельных значений сродства к протону метана P_{CH_4} , проведенное на основании полученных сведений о процессах образования ионов CH_5^+ , дает следующие неравенства: 6) $P_{CH_4} \geq 114$ ккал/моль; 7) $P_{CH_4} < 139$ ккал/моль; 8) $P_{CH_4} < 129$ ккал/моль; 9) $P_{CH_4} < 139$ ккал/моль; 10) $P_{CH_4} \geq 61,2$ ккал/моль, 11) $P_{CH_4} \geq 91$ ккал/моль.

Неравенства 6) и 8) определяют наиболее узкие пределы: $114 \text{ ккал/моль} \leq P_{CH_4} < 129 \text{ ккал/моль}$.

При расчете, наряду с приведенными выше значениями $D(H_2)$, $D(C_2H_5-H)$, $I(H_2)$, $I(C_2H_6)$, использовались следующие величины: $D(CH_3-H) = 101$ ккал/моль (9), $D(HO-H) = 116$ ккал/моль (9), $D(C_3H_5-H) = 77$ ккал/моль (12), $I(CH_4) = 13,04$ эв (10), $I(H_2O) = 12,62$ эв (10), $I(C_3H_6) = 9,84$ эв (10).

* Поскольку процессы (10) и (11), а также (12) и (13) каждый в отдельности не исследовались, мы имеем право уверенно приписать увеличение тока вторичных ионов только тому процессу, который дает меньшую величину P_{CH_4} .

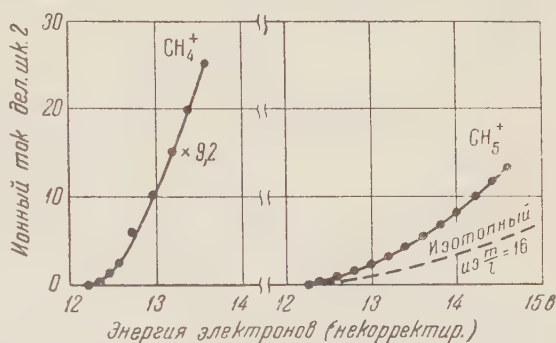


Рис. 1. Кривые появления ионов CH_4^+ и CH_5^+ из метана. Число рядом с кривой появления CH_4^+ — коэффициент, на который надо умножить соответствующие ординаты, чтобы сравнивать между собой кривые появления. $P_{ист. CH_4} = 10^{-4}$ мм рт. ст.,

$P_{ист. C_2H_6} = 2 \cdot 10^{-4}$ мм рт. ст.

Поиски «утяжеленных» ионов $C_2H_7^+$ производились при столкновениях ионов или молекул этана с молекулами и ионами различных углеводородов, а также водорода. Исследованы следующие процессы столкновения:

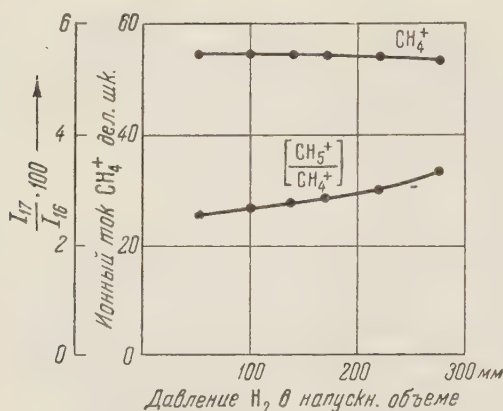


Рис. 2. Зависимость выхода ионов CH_5^+ от давления водорода. В ионном источнике смесь CH_4-H_2 . Давление газа в ионном источнике в $\sim 10^6$ раз меньше, чем давление в напускном объеме

$+ H_2^+$. При этом получается $P_{C_2H_6} < 61$ ккал/моль.

Поиски ионов $C_3H_9^+$ производились при ионизации пропана, а также при ионизации смесей пропана с водородом, с метаном, с этаном. При этом показано, что ионы $C_3H_9^+$ не обнаруживаются как продукты процессов $C_3H_8^+ + H_2$, $C_3H_8^+ + H_2^+$, $C_3H_8^+ + CH_4$, $C_3H_8^+ + CH_4^+$, $C_3H_8^+ + C_2H_6$, $C_3H_8^+ + C_2H_6^+$, $C_3H_8^+ + C_3H_8^+$. Наименьшее возможное значение верхней границы $P_{C_2H_6}$ дает процесс $C_3H_8^+ + H_2^+$. Таким образом, $P_{C_2H_6} < 61$ ккал/моль.

Строго говоря, обнаружение всех приведенных в статье ионно-молекулярных процессов в аппаратуре, применявшейся авторами, возможно не только в случае их термонеutrальности или экзотермичности, но и в случае, когда процесс эндотермичен на 1–2 ккал/моль. Это приводит к снижению найденных величин на 1–2 ккал/моль.

Обнаруженная резкая разница в сродстве к протону метана и его гомологов является весьма неожиданной и требует своего теоретического объяснения.

Институт химической физики
Академии наук СССР

Поступило
21 X 1957

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ H. D. Smyth, Rev. Mod. Phys., **3**, 347 (1931).
- ² В. Л. Тальрозе, А. К. Любимова, ДАН, **86**, 909 (1952).
- ³ В. Л. Тальрозе, Диссертация, Инст. хим. физ. АН СССР, 1952.
- ⁴ J. O. Hirschfelder, J. Chem. Phys., **6**, 795 (1938).
- ⁵ R. S. Barker, H. Eyring, J. Chem. Phys., **22**, 2072 (1954).
- ⁶ J. H. Simons et al., J. Chem. Phys., **11**, 312 (1943).
- ⁷ В. Л. Тальрозе, Е. Л. Франкевич, ДАН, **111**, 376 (1956).
- ⁸ В. Л. Тальрозе, Г. Д. Танцырев, Я. А. Юхвидин, Зав. лаб., **10**, 1147 (1955).
- ⁹ Т. Коттрелл, Прочность химических связей, ИЛ, 1956.
- ¹⁰ R. E. Honig, J. Chem. Phys., **16**, 105 (1948).
- ¹¹ Е. Л. Франкевич, В. Л. Тальрозе, Приборы и техн. эксперим., № 2, 48 (1957).
- ¹² E. Steacie, Atomic and Free Radical Reactions, №-Y., 1954.
- ¹³ D. P. Stevenson, D. O. Schissler, J. Chem. Phys., **23**, 1353 (1955).

ФИЗИЧЕСКАЯ ХИМИЯ

Н. А. ФУКС и С. С. ЯНКОВСКИЙ

О ТЕРМОФОРЕЗЕ В ПОТОКЕ АЭРОЗОЛЯ

(Представлено академиком А. Н. Фрумкиным 2 I 1958)

Вопрос о величине силы, действующей на частицы аэрозолей в неравномерно нагретой среде, теоретически разрешен для двух предельных случаев: очень большой и очень малой величины отношения d/λ , где d — размер частиц и λ — средняя длина свободного пути молекул газа. При $d \ll \lambda$ присутствие частицы не нарушает распределения скоростей молекул, температурный градиент внутри частицы мал и им можно пренебречь. Действующая на частицу сила вызвана тем, что средние скорости бомбардирующих частицу с разных сторон молекул газа несколько различны. Результирующая сила, не зависящая от природы частицы (если пренебречь небольшим эффектом, обусловленным различиями в величине коэффициента accommodation молекул, и принять его равным единице), равна в случае сферической частицы с диаметром d

$$F = - \frac{\pi d^2 p \lambda G}{8T}, \quad (1)$$

где p — давление газа, T — абсолютная температура, G — температурный градиент в газе (^{1, 2}).

В случае $d \gg \lambda$ основную роль играет градиент температуры на поверхности частицы, вызывающий, как указал Максвелл, скольжение газа вдоль поверхности. Обусловленная трением между частицей и газом результирующая сила равна по Эпштейну (³)

$$F = - \frac{9\pi\beta\eta^2 d G}{2\gamma T}, \quad (2)$$

где η — вязкость и γ — плотность газа, $\beta = \chi_a / (2\chi_a + \chi_i)$, χ_a и χ_i — теплопроводности газа и частицы.

Приравнявая F сопротивлению среды, мы получим для скорости термофореза, т. е. движения частицы в поле температурного градиента, при $d \gg \lambda$ выражение

$$V = - \frac{3\beta\gamma G}{2T}, \quad (3)$$

где γ — кинематическая вязкость газа. При $d \lesssim \lambda$ сопротивление среды равно $-\pi/3 \kappa \bar{\gamma} d^2 V$, где $\bar{c}$ — средняя абсолютная скорость газовых молекул, κ — коэффициент, имеющий значение от 1,0 до 1,44 (⁴). Следовательно,

$$V = - \frac{3p\lambda G}{8\kappa\gamma\bar{c}T}. \quad (4)$$

Полагая $p = \pi/8 \cdot \gamma (\bar{c})^2$, $\eta = \vartheta \gamma \bar{c} \lambda$ (ϑ — числовой коэффициент от 0,3 до 0,5), мы получаем:

$$V = - \frac{3\pi\gamma G}{64\vartheta\kappa T}. \quad (5)$$

Таким образом, в обоих предельных случаях скорость термофореза не зависит от размера частиц. Так как в большинстве случаев $\beta \ll 1$, то за исключением частиц из очень плохих проводников тепла, скорость термофореза при $d \ll \lambda$ должна быть значительно больше, чем при $d \gg \lambda$. Для случая $d \approx \lambda$ теория явления весьма сложна; работ в этом направлении не имеется.

Экспериментальное исследование термофореза проводилось в конденсаторе Милликена, в котором верхняя обкладка имела более высокую температуру, чем нижняя^(5,6), т. е. в неподвижной среде. Измерялась скорость термофореза капелек нелетучих органических жидкостей $d = 0,8-4,0 \mu$ и было получено хорошее согласие с формулой (3), причем для капелек с $d < 1 \mu$ в нее нужно было вводить поправочный фактор Кенингема.

Для техники имеет очень большое значение термофоретическое осаждение аэрозолей из потока, так как образующиеся при движении горячих запыленных газов на стенках холодильников, котельных труб и т. д. осадки пыли обычно обладают весьма малой теплопроводностью и с трудом удаляются. На термофорезе в потоке основано также действие одного из важнейших приборов для исследования аэрозолей — термопреципитатора, в котором аэрозоль просасывается через плоскопараллельную щель между массивными металлическими блоками, посредине которой перпендикулярно линиям тока натянута нагретая металлическая нить или лента. Аэрозоль осаждается на помещенных на поверхности блоков прозрачных подложках в виде узких полосок.

Исследуя работу прибора на ряде полидисперсных аэрозолей, мы обнаружили, что у передней (обращенной навстречу потоку) кромки полосок откладываются преимущественно самые мелкие частицы, у задней кромки — самые крупные. При переходе от передней к задней кромке дисперсионный состав осадка непрерывно меняется так, что отношение числа частиц, принадлежащих соседним фракциям, изменяется в пользу более крупной фракции (см. рис. 1). Это явление наблюдалось во всем исследованном нами интервале дисперсности частиц от 0,05 до 6 μ на аэрозолях, полученных пульверизацией раствора NaCl или туши с последующим высушиванием капелек или продуванием воздуха над кварцевым порошком, и на дыме PbO, полученном возгонкой галенита в струе воздуха. Условия осаждения: поперечное сечение щели $0,6 \times 9$ мм, толщина проволоки из никеля 0,2 мм, нагрев током 1,2—1,5 а, скорость просасывания 5—10 мл/сек, что соответствует средней линейной скорости 2—4 см/сек. Аэрозоль засасывался прямо в щель без переходного конфузора и двигался вертикально вверх. Осаждение производилось либо на покровных стеклах (для оптической микроскопии) либо на сеточках с коллодиевой пленкой (для электронной микроскопии). Заметим еще, что при указанной скорости течения в прибор должны были засасываться частицы до 20—30 μ , между тем как максимальный размер частиц в осадках был 6—7 μ . Впрочем, быстрое падение эффективности осаждения в термопреципитаторе с ростом величины частиц, начиная с $d \approx 5 \mu$, общеизвестно.

Описанное явление, указывающее на то, что скорость термофореза в потоке непрерывно падает по мере возрастания размера частиц даже в области применимости формулы (3), не могло остаться незамеченным многочисленными исследователями, работавшими с этим прибором, однако, как ни странно, в литературе можно встретить лишь сделанные вскользь замечания о том, что распределение размеров частиц в осадке термопреципитатора не вполне равномерно. Такое же противоречие с теорией Эпштейна найдено в недавно опубликованной работе Шадта и Кейдла⁽⁷⁾, изучавших осаждение в термопреципитаторе аэрозолей с резко различавшейся теплопроводностью и нашедших, что влияние последней на осаждение значительно меньше, чем это следует из формулы (3). Так как для термофореза в неподвижной среде формула подтверждена опытом, то причиной этих противоречий могут

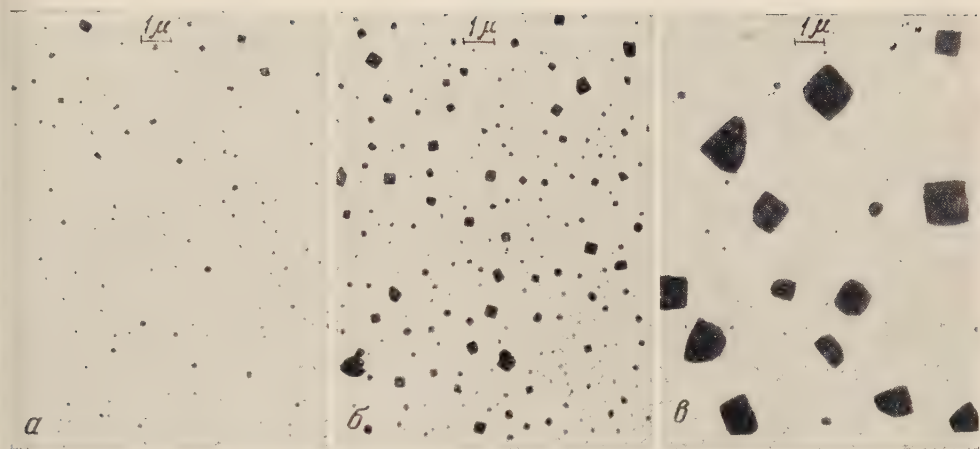


Рис. 1. Электронномикроскопические снимки с осадка аэрозоля NaCl в термопреципитаторе. *а* — у передней кромки, *б* — в середине осадка, *в* — у задней кромки

быть лишь какие-то эффекты, связанные с течением аэрозоля. Рассмотрим кратко некоторые из них.

Инерция частиц препятствует их осаждению. Однако характеризующая вызванное инерцией отклонение траекторий частиц величина «инерционного пробега» частиц ⁽⁸⁾, например, для частиц NaCl размером 4 μ равна в наших опытах 1—2 μ ; при размерах области температурного градиента в несколько сот микрон такое отклонение несущественно. Вызванное градиентом скорости течения Γ вращение частиц препятствует созданию температурного градиента внутри частиц. Максимальная величина Γ в наших опытах была порядка 1000 сек⁻¹ что соответствует ⁽⁹⁾ периоду вращения $\sim 0,01$ сек., тогда как время температурной релаксации частиц NaCl с $d = 4 \mu$ равно $3 \cdot 10^{-7}$ сек. ⁽¹⁰⁾. Еще меньшее значение имеет броуновское вращение частиц. При движении частицы параллельно стенке на близком расстоянии от нее при малых числах Re возникает сила отталкивания от стенки $F = \frac{9}{64} \cdot \pi \gamma d^2 V^2$ ⁽¹¹⁾. Эта сила, вызванная в рассматриваемом случае седиментацией частиц, для указанных выше частиц NaCl равна $8 \cdot 10^{-13}$ дин. Между тем в обычных условиях работы термопреципитатора G имеет величину порядка 5000 град/см, а термофоретическая сила согласно формуле (2) — порядка 10^{-8} дин. Таким образом, ни один из рассмотренных эффектов не объясняет описанного выше явления. Оно противоречит также опытам Я. И. Когана и Р. С. Репиной ⁽¹²⁾, наблюдавших при просасывании аэрозолей снизу вверх через вертикальный капилляр, т. е. в отсутствие термофореза, быстро возраставшее с увеличением размера частиц (начиная с $d = 0,5 \mu$) осаждение их на стенках капилляра.

Государственный научно-исследовательский
институт цветных металлов

Поступило
28 XII 1957

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ A. Einstein, Zs. Phys., **27**, 1 (1924). ² W. Cawood, Trans. Farad. Soc., **32**, 1068 (1936). ³ P. Epstein, Zs. Phys., **54**, 537 (1929). ⁴ P. Epstein, Phys. Rev., **23**, 710 (1924). ⁵ P. Rosenblatt, V. La Mer, Phys. Rev., **70**, 385 (1946). ⁶ R. Saxton, W. Ranz, J. Appl. Phys., **23**, 917 (1952). ⁷ C. Schadt, R. D. Cadle, Anal. Chem., **29**, 864 (1957). ⁸ Н. А. Фукс, Механика аэрозолей, Изд. АН СССР, 1955, стр. 80 и 165. ⁹ Н. А. Фукс, там же, стр. 47. ¹⁰ Н. А. Фукс, там же, стр. 74. ¹¹ Н. А. Фукс, там же, стр. 100. ¹² Я. И. Коган, Р. С. Репина, ДАН, **111**, 851 (1956).

И. Е. ЭЛЬПИНЕР и А. В. СОКОЛЬСКАЯ

**О СИНТЕЗЕ ВЕЩЕСТВ В НАСЫЩЕННОЙ ГАЗАМИ
ВОССТАНОВИТЕЛЬНОЙ АТМОСФЕРЫ ВОДЕ ПОД ДЕЙСТВИЕМ
УЛЬТРАЗВУКОВЫХ ВОЛН**

(Представлено академиком А. И. Опариным 19 XII 1957)

В настоящем сообщении приводятся данные, показывающие, что распространение в воде ультразвуковых волн большой интенсивности обуславливает и в отсутствие кислорода возникновение химических процессов, сопровождавшихся синтезом ряда новых веществ.

Согласно широко распространенной так называемой кавитационной электрохимической теории (¹⁻³) в кавитационной полости в результате возникновения больших электрических напряжений происходит электронный пробой (⁴), обуславливающий ионизацию молекул воды, находящейся здесь в парообразном состоянии. Ионизированные частицы воды почти мгновенно распадаются на валентно ненасыщенные свободные радикалы и атомарный водород ($H_2O \rightarrow H + OH$), как это имеет место при воздействии на воду ионизирующими излучениями.

Если, действительно, в кавитационной полости имеет место появление движущихся зарядов, способных ионизировать молекулы воды, то мы вправе ожидать, что такому процессу могут подвергаться и молекулы диффундирующего сюда газа. Исходя из этих соображений, один из нас еще в 1950 г. (⁵) поставил специальные опыты, которые показали, что в воде, насыщенной газообразным водородом и молекулярным йодом, под действием ультразвуковых волн происходит диссоциация йода. Процесс этот осуществляется, по-видимому, в кавитационной полости, куда вместе с газообразным водородом диффундируют и молекулы йода. Ионизация (или диссоциация) йода тесно связана с параллельной ионизацией (или диссоциацией) водорода. Позже восстановление йода в насыщенной водородом и молекулярным йодом воде под действием ультразвуковых волн наблюдал также Хенглейн (⁶).

В последнее время нам удалось показать, что под действием ультразвуковых волн активируются (диссоциируют) в воде и другие газы. Так, например, оказалось, что в присутствии в озвучиваемой воде водорода и азота имеет место образование аммиака.

Озвучивание воды в присутствии азота и водорода производилось в стеклянных сосудах при интенсивности ультразвуковых волн 6—7 вт на 1 см² излучающей поверхности (частота колебаний 380 и 750 кГц). Объем дистиллированной воды, подвергавшейся озвучиванию, составлял 10 мл. Предварительно исследуемая вода насыщалась одновременно газообразным азотом и водородом, тщательно освобожденными от примесей кислорода.

Для тонкой очистки азота от кислорода нами использован метод, разработанный Л. М. Канторовичем и Ф. М. Рапопортом (⁷), который, в основном, заключается в том, что обезвоженный и нагретый газ пропускается через колонку с препаратом, представляющим собой медь, осажденную на силикагеле. Очистку водорода, получавшегося в аппарате Киппа, осуществляли путем пропускания его через щелочный раствор пирогаллола. В результате

этих манипуляций в насыщенной газами воде кислород полярографическим методом анализа не обнаруживался.

Количественное содержание аммиака в воде до и после озвучивания определяли при помощи реактива Несслера (см. табл. 1).

Как видно из табл. 1, количество образующегося аммиака увеличивается с увеличением времени озвучивания. При насыщении воды только азотом лишь после длительного озвучивания (120 мин.) появляется аммиак в весьма малых количествах. Весьма малые количества аммиака обнаруживаются также при длительном озвучивании воды в присутствии кислорода и азота, что соответствует и некоторым литературным данным⁽⁸⁾. В присутствии кислорода в воде, насыщенной азотом, под действием ультразвуковых волн образуются преимущественно окислы азота.

Важно отметить, что наличие окиси углерода в газовой смеси азота и водорода не препятствует образованию аммиака в озвучиваемой воде. Окись углерода мы добывали путем разложения щавелевой или муравьиной кислоты при небольшом нагреве в присутствии серной кислоты.

Далее выяснилось, что при прибавлении окиси углерода к газовой смеси N_2 и H_2 в озвученной воде образуется (кроме аммиака) синильная кислота, для определения которой нами был использован метод Гиньяра⁽⁹⁾, основанный на реакции превращения пикриновой кислоты в пурпуровую, в присутствии паров синильной кислоты.

Таблица 2

Синтез формальдегида в поле ультразвуковых волн

Продолжит. озвуч., в мин.	Колич. образовавш. формальдегида в γ (10^{-6} г) на 1 мл воды				
	с H_2	с $H_2 + CO$	с $H_2 + CO + N_2$	с воздухом	с CO
0	—	—	0	0	0
60	—	5,6	1,8	—	4,0
120	0,2	16,0	6,0	0,4	6,4
180	—	24	15,0	0,1	7,4
180	—	26,4	—	—	—

з уется формальдегид, если в этой воде присутствуют водород и окись углерода. И использованный нами метод определения формальдегида основан на реакции последнего с фенилгидразином и щелочным раствором $K_3Fe(CN)_6$ ⁽¹⁰⁾. Количество образовавшегося формальдегида определяли при помощи спектрофотометра СФ-4 при λ 520 м μ .

Как видно из табл. 2, за 180 мин. в озвученной в присутствии H_2 и CO воде образуется 26 γ формальдегида на 1 мл воды; в присутствии воздуха в озвучиваемой воде формальдегид почти не обнаруживается. Формальдегид под действием ультразвуковых волн образуется и в присутствии H_2 , CO и N_2 . При этих условиях одновременно с формальдегидом синтезируются NH_3

Таблица 1

Синтез аммиака в поле ультразвуковых волн

Продолжит. озвуч., в мин.	Колич. образовавш. аммиака в γ на 1 мл воды			
	с H_2	с N_2	с $H_2 + N_2 + CO$	с воздухом
50	—	—	0,85	—
60	0	0	1,26	0,04
120	—	0,62	2,6	—
180	—	—	8,7	0,62
180	—	—	—	7,8
180	—	—	—	7,1
180	—	—	—	8,5 *
180	—	—	9,0 **	6,5 **
360	—	—	12,5	—

* Озвучивание производилось в 0,1N HCl.

** Озвучивание производилось в 1 % янтарной кислоте.

для определения которой нами был использован метод Гиньяра⁽⁹⁾, основанный на реакции превращения пикриновой кислоты в пурпуровую, в присутствии паров синильной кислоты.

Многочисленные исследования показали, что в озвученной воде (экспозиция 3 часа) в присутствии N_2 , CO и H_2 обнаруживается от 1 до 10 γ HCN. Синильная кислота не обнаружена в воде, озвученной в присутствии кислорода или одного лишь азота или газовой смеси N_2 и H_2 .

Синтез синильной кислоты в поле ультразвуковых волн осуществляется и при замене в используемой газовой смеси окиси углерода на метан, т. е. в присутствии N_2 , H_2 и CH_4 .

В дальнейшем нам удалось установить, что в озвучиваемой воде обра-

и HCN, количество которых увеличивается с увеличением времени озвучивания. Появление этих продуктов может обеспечить дальнейший синтез важных в биологическом отношении веществ, как это имеет место под влиянием электрических разрядов или ультрафиолетового излучения (¹¹, ¹²).

Полученные нами данные позволяют высказать некоторые соображения о том, что акустические и ультраакустические колебания, наряду с другими физическими агентами (ультрафиолетовые лучи, электрические разряды и радиораспад), могли служить источником энергии для синтеза основных продуктов, послуживших материалом для построения живых организмов в первоначальный период существования нашей планеты. Такое представление полностью отвечает теории А. И. Опарина (¹³) о возникновении жизни на Земле. Крайне важна количественная оценка акустической энергии, возникавшей и возникающей по сей день в природных условиях (электрические разряды, водопады, моретрясения и т. д.).

Поступило
21 XI 1957

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ R. O. Pridmore, P. Grabar, J. Chim. Phys., **46**, 323 (1949). ² N. Miller, Trans. Farad. Soc., **46**, 546 (1950). ³ И. Е. Эльпинер, ЖТФ, **21**, 1205 (1951). ⁴ Я. И. Френкель, Acta Physicochim. URSS, **12**, 317 (1940). ⁵ И. Е. Эльпинер, Акуст. журн., **2**, 217 (1956). ⁶ A. Henglein, Naturwiss., **43**, 277 (1956). ⁷ Л. М. Канторович, Ф. М. Рапопорт, Тр. Гос. н.-и. и проектн. инст. азотн. пром., **1** (1952). ⁸ И. Г. Полоцкий, ЖОХ, **9**, 885 (1940). ⁹ Н. Н. Иванов, Методы физиологии и биохимии растений, 1946. ¹⁰ M. Tappenburg, C. E. Bricker, Anal. Chem., **23**, 354 (1951). ¹¹ S. Miller, J. Am. Chem. Soc., **77**, 2351 (1955). ¹² Т. Е. Павловская, А. Г. Пасынский, Сборн. докл. на международном совещании по возникновению жизни на Земле, Изд. АН СССР, 1957, стр. 102. ¹³ А. И. Опарин, Происхождение жизни на Земле, Изд. АН СССР, 1957.

ФИЗИЧЕСКАЯ ХИМИЯ

Н. М. ЭМАНУЭЛЬ, Э. А. БЛЮМБЕРГ, Д. М. ЗИВ и В. Л. ПИКАЕВА

ИНИЦИИРУЮЩЕЕ ДЕЙСТВИЕ ИЗЛУЧЕНИЯ РАДОНА
В ПРОЦЕССЕ ОКИСЛЕНИЯ ИЗОДЕКАНА (2,7-ДИМЕТИЛОКТАНА)

(Представлено академиком В. Н. Кондратьевым 28 XII 1957)

Предложение об использовании излучения радиоактивных инертных газов для инициирования цепных реакций было выдвинуто одним из нас, как логическое следствие принципа газового инициирования химически активными газами ⁽¹⁾ и эффекта стимулирующего действия проникающих излучений ⁽²⁾.

В настоящее время в арсенале химика экспериментатора кроме радиоактивных эманацій — радона, торона и актинона — имеются также Xe^{133} , Kr^{85} и Ar^{41} . Последние три радиоактивных изотопа могут быть получены из соответствующих инертных неактивных газов по (n, γ) -реакции. Кроме того, Xe^{133} и Kr^{85} являются продуктами деления U^{235} и Pu^{239} и выделяются при очистке блоков ядерного горючего, зашлакованных продуктами деления.

Применение инертных радиоактивных газов позволяет использовать для целей инициирования все типы излучения: α , β и γ при различных значениях энергии излучений. Кроме того, α - и β -частицы, вылетающие из соответствующих радиоактивных атомов, непосредственно попадают в реагирующую систему и оказывают свое действие равномерно по всей массе жидкости. Это очень существенно, так как введение в реакционный сосуд этих частиц от внешних источников сопряжено с огромными трудностями или невозможно вовсе из-за сильного поглощения их стенкой сосуда или материалом окошка.

Использование излучений радиоактивных газов для целей инициирования должно быть весьма эффективным не только в случае медленных цепных жидкофазных реакций. Несомненно также, что применение радиоактивных газов позволит выполнить интересные эксперименты с газофазными цепными реакциями.

В настоящей работе в качестве объекта исследования мы выбрали реакцию окисления изодекана (2,7-диметилоктана) под действием α -частиц радона. Мы исходили из того, что процессы окисления углеводородов в жидкой фазе представляют собой вырожденно-разветвленные цепные реакции. Это означает, что стимулирование таких процессов можно осуществлять лишь в начальный период развития процесса.

Действие излучения радона приводит к возникновению в системе активных частиц-свободных радикалов и атомов, т. е. к увеличению начальной скорости зарождения цепей ω_0 . Величина ω_0 в случае воздействия радиоактивных газов может быть легко подсчитана исходя из энергии ионизирующего излучения и энергии разрываемой связи в исходном углеводороде. Это обстоятельство является одним из преимуществ использования в качестве инициаторов радиоактивных инертных газов по сравнению с химически активными газами.

Опыты проводились на стеклянной установке (рис. 1), включающей окислительную ячейку, принятую в наших работах по жидкофазному окислению ⁽³⁾.

Смесь радона с кислородом готовилась в колбе 1, снабженной пробиркой с отверстиями и с двойным шлифом; верхний шлиф предназначен для поворота палочки R, разбивающей помещенную в пробирке ампулу с радонном, нижний — для укрепления пробирки в колбе.

Во избежание потерь радона в окружающую атмосферу система работала под небольшим вакуумом (~ 700 мм рт. ст.). Кислород, содержащий радон

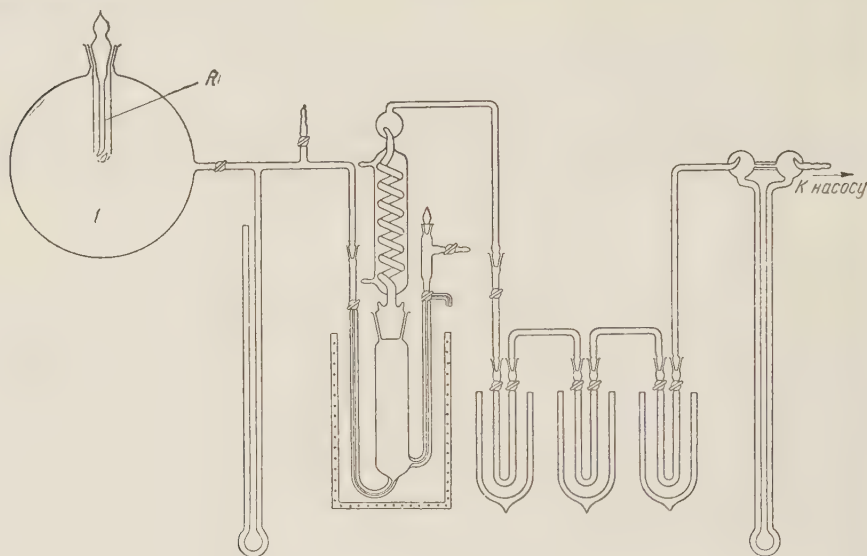


Рис. 1. Схема экспериментальной установки

прокачивался водоструйным насосом из колбы 1 через окислительную ячейку, помещенную в воздушный термостат при температуре 120° и выводился через три последовательно соединенные U-образные ловушки, заполненные активированным углем и охлаждаемые до температуры -80° . Непрореагировавший кислород, освобожденный от радона путем адсорбции последнего на угле, выбрасывался в атмосферу.

По окончании иницирующего воздействия радона (через час после начала опыта) колба отключалась и окисление велось чистым кислородом из баллона. В условиях наших опытов на реакцию воздействует излучение радона, барботирующего через жидкость, растворенного радона и радона находящегося в газовой фазе над поверхностью жидкости. Кроме того, существенную роль играют дочерние продукты распада Rn. При расчете интегральной дозы мы учитывали все эти источники радиоактивных воздействий на изодекан. При исходной активности радона в ампуле 12 м Си суммарная доза, воспринимаемая системой при часовом иницировании, оказалась равной 615 рад. При этом интересно отметить, что в условиях наших опытов действует главным образом радон, растворенный в изодекане (165 рад.) и дочерние радиоактивные продукты распада (437 рад.). Действие радиоактивных продуктов распада, составляющее значительную часть общей дозы излучения продолжается еще некоторое время после периода иницирования, т. е. после того как радон полностью выдувается из жидкости током чистого кислорода. Однако этот период последствия активного осадка не превышает 1—1,5 час., причем в течение этого времени активность осадка резко падает (через 20 мин. остается всего лишь 30 % от активности в конце периода иницирования). Таким образом, в условиях наших опытов (при исходной активности радона 12 м Си) иницирующее воздействие радона продолжалось самое большее 2,5 часа.

Следует заметить, что при применении химически активных газовых инициаторов жидкофазного окисления углеводородов (NO_2 , Cl_2 , O_3 и др.) мы огра-

начивались значительно меньшими временами иницирования. Однако по отношению к реакции окисления изодекана при 120° время воздействия излучения, равное 2,5 часа, не является слишком большим, так как неиницированная реакция образования кислот в этих условиях имеет период индукции порядка 20 часов.

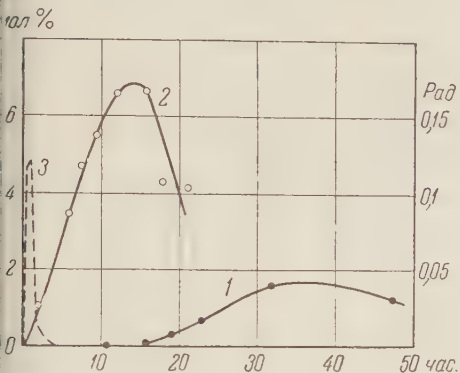


Рис. 2. Кинетические кривые накопления гидроперекисей в процессе окисления изодекана при 120° . 1 — неиницированная реакция, 2 — воздействие Rn (исходная активность 12 м Си) в течение 1 часа, 3 — изменение суммарной активности в ходе реакции (правая шкала)

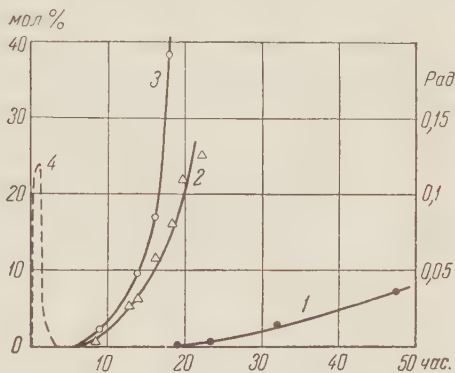


Рис. 3. Кинетические кривые, накопления кислот в процессе окисления изодекана при 120° . 1 — неиницированное окисление, 2 — окисление при воздействии Rn (исходная активность 7 м Си) в течение 1 часа, 3 — то же при исходной активности 12 м Си, 4 — изменение суммарной активности в ходе реакции

Кинетические кривые накопления перекисей и кислот при окислении изодекана, инициированном α -излучением радона (а также α - и β -излучением продуктов распада Rn) представлены на рис. 2 и рис. 3. На этих же рисунках пунктирными кривыми нанесено изменение суммарной активности во времени при начальной активности радона в ампуле 12 м Си.

Рис. 2 показывает, что кратковременного стимулирующего воздействия излучения радона достаточно для значительного уменьшения периода индукции при образовании гидроперекисей. Увеличивается также максимальный выход перекисных соединений.

Из сравнения кинетических кривых накопления кислот (2 и 3) с кривой 1 для неиницированного окисления (рис. 3) также весьма отчетливо выступает эффект кратковременного стимулирующего воздействия. Если процесс образования кислот в обычных условиях при автоокислении начинается лишь спустя 20 час. после подачи кислорода, то при добавке к кислороду 2 м Си Rn и пропускании этого газа через изодекан при 120° в течение 1 часа (кривая 3) заметные количества кислот в реагирующей смеси появляются уже через 5—6 час., т. е. период индукции окисления сокращается более чем втрое. Этот результат находится в соответствии с изменением начальной скорости зарождения цепей под действием ионизирующего излучения. Величина ω_0 для неиницированной реакции, рассчитанная в предположении термической реакции углеводорода с молекулой O_2 , равна 10^{12} — 10^{13} радикалов/см³·сек. В случае же инициирующего действия 12 м Си Rn ω_0 равна 10^{12} радикалов/см³·сек.

Такое сильное увеличение скорости зарождения активных центров должно было привести к значительному сокращению периода индукции, что и наблюдается на опыте.

Еще больший эффект оказывает воздействие α -излучения Rn на скорость реакции после окончания периода индукции. Неиницированное окисление изодекана по окончании периода индукции идет с относительно малой скоростью, сохраняющейся практически постоянной до больших глубин преращения (32 мол. %). Кинетическая же кривая образования кислот при

воздействии 12 мСи Rn представляет собой кривую с резко выраженным автокаталитическим характером. Скорость окисления в этом случае после окончания периода индукции резко увеличивается и ее максимальное значение превышает скорость неинициированного окисления более чем в 10 раз. Опыты с другими активностями (отличными от 12 мСи) носили лишь ориентировочный характер. Было показано, что увеличение дозы (свыше 615 рад.) не приводит к дополнительным эффектам в увеличении скорости реакции.

Из данных по инициирующему воздействию 7 мСи радона (рис.3) видно, что и дозы меньшие чем 615 рад. могут вызывать отчетливые ускорения процесса окисления. Общая доза при использовании 7 мСи радона составляла примерно 400 рад., а эффект ускорения был получен практически такой же как и при применении 12 мСи радиоактивной эманации.

Авторы выражают благодарность В. М. Вдовенко за интерес к работе, а также В. М. Пермякову и его сотрудникам за изготовление использованных в настоящей работе препаратов радона.

Институт химической физики
Академии наук СССР

Радиовый институт
Академии наук СССР

Поступило
25 XII 1957

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ Н. М. Эмануэль, ЖФХ, 30, 847 (1956). ² Н. М. Эмануэль, ДАН, 111, 1286 (1956). ³ Д. Г. Кнорре, З. К. Майзус, Н. М. Эмануэль, ЖФХ, 29, 710 (1955).

ХИМИЧЕСКАЯ ТЕХНОЛОГИЯ

Р. Д. ОБОЛЕНЦЕВ и А. В. МАШКИНА

**КИНЕТИКА ГИДРОГЕНОЛИЗА
ДИБЕНЗОТИОФЕНА И ОКТАГИДРОДИБЕНЗОТИОФЕНА
НАД АЛЮМОКОБАЛЬТОМОЛИБДЕНОВЫМ КАТАЛИЗАТОРОМ**

(Представлено академиком А. В. Топчиевым 11 XII 1957)

Реакции гидрогенолиза сераорганических соединений лежат в основе важнейших современных каталитических процессов переработки сернистых нефтей. Эти реакции мало изучены, в частности не изучена кинетика гидрогенолиза индивидуальных сераорганических соединений в присутствии современного, широко применяемого в нефтеперерабатывающей промышленности алюмокобальтмолибденового катализатора. Задачей данного исследования было частичное восполнение этого пробела.

В связи с тем, что так называемая «остаточная сера» в нефтепродуктах представлена в значительной мере соединениями тиофенового ряда, нами для изучения кинетики гидрогенолиза были избраны дибензотиофен (т. кип. 152,0—154,0°/3 мм) и 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8-октагидродибензотиофен (т. кип. 119,0—120,0°/1 мм), синтезированные по описанным в литературе методикам^(1, 2). Опыты по изучению кинетики гидрогенолиза этих соединений проводились на несколько видоизмененной нами установке проточного типа конструкции ИОХ АН СССР⁽³⁾, в реактор которой загружался алюмокобальтмолибденовый катализатор, применявшийся для заводских опытов⁽⁴⁾. Дибензотиофен и октагидродибензотиофен были взяты в виде 0,5% (по сере) растворов в техническом цетане (т. кип. 260—310°).

Материальный баланс опытов сводился по сере на основании данных о количествах подававшегося сырья, образовавшегося катализата и о содержании в них серы. Общая сера в катализате определялась ламповым методом, меркаптанная — аргентометрически, сероводородная — йодометрически. Количественное определение в катализате непрореагировавшего дибензотиофена или октагидродибензотиофена и образовавшегося бифенила проводилось по спектрам поглощения в ультрафиолетовой области.

Для описания результатов опытов (табл. 1) мы попытались воспользоваться кинетическим уравнением Фроста для мономолекулярных реакций⁽⁵⁾. Однако это уравнение оказалось удовлетворительным лишь для описания опытов, проводимых при большом избытке водорода. Независимо от отношения водорода к сырью результаты наших опытов хорошо описывались уравнением:

$$\ln \frac{D}{D-m} = a\tau^b, \quad (1)$$

где τ — время контакта, m — глубина гидрогенолиза в процентах, D — предельное значение m при $\tau \rightarrow \infty$, a и b — параметры.

В разное время уравнения этого типа были предложены для описания кинетики различных реакций А. Н. Колмогоровым⁽⁶⁾, Б. В. Ерофеевым⁽⁷⁾, Л. А. Казеевым⁽⁸⁾, Б. П. Бурлаковым⁽⁹⁾.

По разработанной С. А. Казеевым методике⁽⁸⁾, нами были найдены уравнения, описывающие зависимость глубины и скорости гидрогенолиза дибензотиофена и октагидродибензотиофена от времени контакта (табл. 2). Правильность предложенных уравнений подтверждается удовлетворительным

Гидрогенолиз дибензотиофена и октагидродибензотиофена над алюмокобальто-молибденовым катализатором

Дибензотиофен					Октагидродибензотиофен				
τ , сек.	$m_{оп}$, %	m по уравн. табл. 2, %	m по уравн. (8) (9), %	v , %·сек ⁻¹	τ , сек.	$m_{оп}$, %	m по уравн. табл. 2, %	m по уравн. (10), (11), %	v , %·сек. ⁻¹
$P = 40 \text{ ата}; T = 325^\circ \text{C}; P_{H_2} = 33,3 \text{ ата}$									
37,4	74,2	74,2		0,12	13,50	76,5	76,5		0,97
7,03	52,4	52,8		2,74	33,6	82,6	82,6		0,05
3,47	39,4	39,4		5,3	4,04	51,0	51,9		6,16
2,37	32,8	32,8		7,04	3,36	47,0	47,5		7,20
2,20	31,2	31,5			1,8	33,0	33,5		11,36
4,22	44,9	43,1		4,23	1,35	28,0	28,0		13,3
$P = 40 \text{ ата}; T = 375^\circ \text{C}; P_{H_2} = 33,5 \text{ ата}$									
34,8	89,8	90,0	90,4	0,10	38,2	89,9	89,9	89,8	0,13
18,35	86,3	86,3	86,9	0,50	7,31	79,8	79,8	78,5	2,18
5,40	67,0	67,0	67,6	3,87	9,20	85,0	83,1	81,9	0,999
3,15	56,1	55,3	56,0	6,77	16,6	88,2	88,2	87,7	0,30
2,58	53,7	51,0	51,7	7,76	3,11	59,3	62,4	60,6	8,34
1,73	38,0	42,7	43,4	12,66	1,66	48,0	47,6	46,1	13,64
					1,24	43,5	41,2	39,9	16,42
$P = 40 \text{ ата}; T = 425^\circ \text{C}; P_{H_2} = 33,3 \text{ ата}$									
34,10	94,7	94,5		0,029	11,5	89,8	89,9		0,77
16,96	92,0	92,0		0,38	15,3	91,6	91,98		0,45
7,565	84,0	83,4		1,89	28,8	94,2	94,4		0,08
3,68	69,1	70,4		5,86	3,46	71,8	72,8		5,66
2,24	60,3	60,0		9,50	8,65	87,0	87,0		1,33
1,89	54,0	56,2		11,99	2,90	69,7	69,4		6,65
1,23	46,0	51,5		16,91	1,54	56,6	56,6		13,15
					1,15	54,5	50,8		15,68
$P = 40 \text{ ата}; T = 375^\circ \text{C}; P_{H_2} = 9,44 \text{ ата}; P = 40 \text{ ата}; T = 375^\circ \text{C}; P_{H_2} = 9,5 \text{ ата}$									
4,93	15,0	17,8	17,8	2,13	5,96	30,0	26,2	26,6	2,26
7,1	21,6	21,7	21,8	1,65	17,9	44,4	44,4	45,1	1,03
6,2	20,5	20,2	20,2	1,77	29,8	52,8	53,1	53,9	0,58
16,2	32,7	33,0	33,0	0,95	41,7	58,1	58,1	58,9	0,35
29,8	43,0	43,0	42,7	0,56					
31,74	43,9	44,0	43,9	0,53					
$P = 40 \text{ ата}; T = 375^\circ \text{C}; P_{H_2} = 19,92 \text{ ата}; P = 40 \text{ ата}; T = 375^\circ \text{C}; P_{H_2} = 20,0 \text{ ата}$									
4,37	36,0	35,9	37,6	4,13	3,73	40,0	40,0	41,2	5,44
7,75	47,5	46,2	48,1	2,48	14,9	64,0	66,5	67,6	1,34
24,8	68,2	66,8	69,1	0,58	29,8	74,0	74,6	75,1	0,32
18,77	62,7	62,4	64,1	0,95	41,7	76,5	76,5	76,8	0,107
33,0	71,0	70,7	72,0	0,39	59,6	77,5	77,5	77,6	0,032
					4,97	45,7	45,7	47,0	4,26
$P = 40 \text{ ата}; T = 375^\circ \text{C}; P_{H_2} = 36,5 \text{ ата}; P = 40 \text{ ата}; T = 375^\circ \text{C}; P_{H_2} = 37,0 \text{ ата}$									
3,01	62,0	60,2	59,9	7,01	0,71	33,5	32,8	32,9	25,96
4,70	69,0	70,1	69,8	4,68	0,95	38,5	38,5	38,6	21,86
8,08	80,0	80,6	80,3	2,17	2,84	63,5	63,95	64,1	8,61
16,8	90,5	89,8	89,8	0,42	9,46	87,0	86,9	87,0	1,24
17,78	90,0	90,4	90,2	0,47	16,6	90,0	91,4	91,4	0,53
28,7	93,0	92,9	92,8	0,099	31,1	92,8	92,8	92,8	0,03
					49,8	92,8	92,99	92,99	0,025

Примечание: τ рассчитывалось по формуле $\tau = \frac{273,2 v_R \cdot 3600 P}{(v_H + v_C) T}$, где v_R — истинный объем реакционного пространства в мл, $(v_H + v_C)$ — сумма объемов водорода и сырья, приведенных к нормальным условиям, в мл.

совпадением опытных и расчетных глубин гидрогенолиза (табл. 1). Зависимость параметров кинетических уравнений от температуры описывается следующими уравнениями.

Дибензотиофен

$$a = 32,42 e^{-5523/RT}; \quad (2)$$

$$b = 0,32 e^{+923,2/RT}; \quad (3)$$

$$D = 359,1 e^{-1845/RT}. \quad (4)$$

Октагидродибензотиофен

$$a = 70,8 e^{-6366/RT}; \quad (5)$$

$$b = 0,12 e^{+2275/RT}; \quad (6)$$

$$D = 217,3 e^{-1141/RT}. \quad (7)$$

Аррениусовская зависимость параметра a , характеризующего скоростной уровень реакции, от температуры показана на рис. 1.

В связи с тем, что для промышленности представляет интерес выявление зависимости глубины гидрообессеривания от парциального давления водорода, мы вывели уравнения общей зависимости глубины и скорости

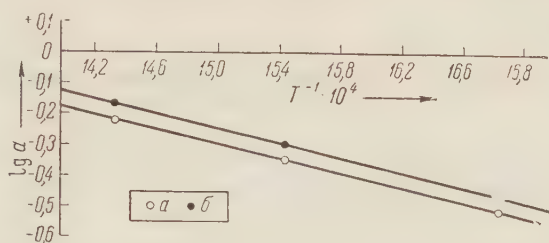


Рис. 1. Зависимость $\lg a$ от обратной величины абсолютной температуры. a — дибензотиофен, b — октагидродибензотиофен

гидрогенолиза дибензотиофена и октагидродибензотиофена от времени контакта и парциального давления водорода:

Дибензотиофен

$$\ln \frac{61,63 + 0,887p_{H_2}}{61,63 + 0,887p_{H_2} - m} = 0,0078p_{H_2}^{1,154} \cdot \tau^{0,65}; \quad (8)$$

$$v = (61,63 + 0,887p_{H_2} - m) \cdot 0,0078p_{H_2}^{1,154} \cdot 0,65\tau^{-0,35}; \quad (9)$$

Октагидродибензотиофен

$$\ln \frac{60,37 + 0,882p_{H_2}}{60,37 + 0,882p_{H_2} - m} = 0,0136p_{H_2}^{1,028} \cdot \tau^{0,71}; \quad (10)$$

$$v = (60,37 + 0,882p_{H_2} - m) \cdot 0,0136p_{H_2}^{1,028} \cdot 0,71\tau^{-0,29}. \quad (11)$$

Уравнения (8)—(11) были выведены следующим образом: отложив по оси абсцисс значения p_{H_2} , а по оси ординат значения D , мы получили прямые, являющиеся анаморфозами уравнений (12), (13):

$$\text{Дибензотиофен: } D = 61,63 + 0,887p_{H_2}. \quad (12)$$

$$\text{Октагидродибензотиофен: } D = 60,37 + 0,882p_{H_2}. \quad (13)$$

Отложив по оси абсцисс значения $\lg p_{H_2}$, а по оси ординат $\lg a$, мы получили прямые, являющиеся анаморфозами уравнений (14), (15):

$$\text{Дибензотиофен: } a = 0,0078p_{H_2}^{1,154}. \quad (14)$$

$$\text{Октагидродибензотиофен: } a = 0,0136p_{H_2}^{1,028}. \quad (15)$$

Принимая во внимание практическую независимость параметра b от парциального давления водорода и делая соответствующие подстановки, мы получили уравнения (8)—(11), которые удовлетворяют опытным данным (табл. 1).

Результаты анализа по спектрам поглощения в ультрафиолетовой области показали, что вся сера, содержащаяся в жидком катализате, представлена непрореагировавшим дибензотиофеном или октагидродибензотиофеном. Продуктом распада дибензотиофена является только бифенил, причем количество последнего в пределах погрешности опыта совпадает с количеством прореагировавшего дибензотиофена. В изученных нами условиях гидроге-

нолиз дибензотиофена протекает в одну стадию с образованием бифенила и сероводорода по схеме:

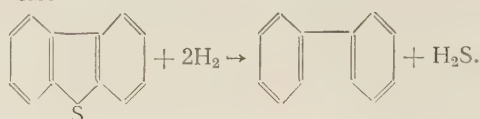


Таблица 2

Кинетические уравнения для реакции гидрогенолиза дибензотиофена и октагидродибензотиофена

$T, ^\circ\text{C}$	$p\text{H}_2$ средн., ата	D	$\ln \frac{D}{D-m}$	$v, \text{ \%} \cdot \text{сек}^{-1}$
Дибензотиофен				
325	33,3	76	$0,311 \tau^{0,687}$	$(76 - m) 0,214 \tau^{-0,314}$
375	9,44	79	$0,103 \tau^{0,655}$	$(70 - m) 0,068 \tau^{-0,345}$
375	19,92	79	$0,232 \tau^{0,650}$	$(79 - m) 0,151 \tau^{-0,350}$
375	33,6	91	$0,442 \tau^{0,654}$	$(91 - m) 0,289 \tau^{-0,346}$
375	36,5	94	$0,497 \tau^{0,650}$	$(94 - m) 0,323 \tau^{-0,350}$
425	33,3	95	$0,607 \tau^{0,615}$	$(95 - m) 0,373 \tau^{-0,385}$
Октагидродибензотиофен				
325	33,3	83	$0,325 \tau^{0,792}$	$(83 - m) 0,257 \tau^{-0,208}$
375	9,5	68	$0,137 \tau^{0,709}$	$(68 - m) 0,097 \tau^{-0,291}$
375	20,0	78	$0,284 \tau^{0,706}$	$(78 - m) 0,200 \tau^{-0,294}$
375	33,5	90	$0,524 \tau^{0,716}$	$(90 - m) 0,375 \tau^{-0,284}$
375	37,0	93	$0,554 \tau^{0,710}$	$(93 - m) 0,393 \tau^{-0,290}$
425	33,5	95	$0,705 \tau^{0,582}$	$(95 - m) 0,410 \tau^{-0,418}$

Первичность образовавшихся бифенила и сероводорода была установлена нами по методу Шнайдера и Фролича ⁽¹⁰⁾ экстраполяцией превращения дибензотиофена к нулю.

Башкирский филиал
Академии наук СССР

Поступило
11 XII 1957

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ H. G. Gilman, A. Jacoby, J. Org. Chem., **3**, № 2, 108 (1938). ² W. Соорег, J. Chem. Soc., 1955, 1386. ³ X. Б. Миначев, Н. И. Шуйкин и др., Изв. АН СССР, ОХН, 1954, 1067. ⁴ Д. А. Гольдштейн, Г. С. Шнайдер и др., Химия и технология топлива масел, **6**, 36 (1957). ⁵ А. В. Фрост, Вестн. МГУ, № 3-4, 111 (1946). ⁶ А. Н. Колмогоров, Изв. АН СССР, ОМЭН, сер. матем., № 3 (1937). ⁷ Б. В. Ерофеев, ДАН, **52**, № 6, 515 (1946). ⁸ С. А. Казеев Кинетика в приложении к металлургии, М., 1956. ⁹ Б. П. Бурлаков, Сборн. научн. студ. работ, в. 22, Химия, Изд. МГУ, 1941, стр. 105. ¹⁰ V. Schneider, P. K. Frolich, Ind. and Eng. Chem., **23**, 1405 (1931) (цит. по К. Эллис, Химия углеводородов нефти и их производных, **1**, М. (1936).

М. Е. ВОСКОБОЙНИКОВ

ПОЛОЖЕНИЕ НУММУЛИТОВЫХ ИЗВЕСТНЯКОВ В РАЗРЕЗЕ ПАЛЕОГЕНА СЕВЕРНОГО ПРИАРАЛЬЯ

(Представлено академиком К. И. Сатпаевым 21 XII 1957)

Как показали исследования последних лет, горизонт известняков, часто с нуммулитами, прослеживается в разрезах морского палеогена на громадной площади от восточного берега Каспия до Прикаратасуского района (табл. 1). Он отвечает основанию карбонатных фаций эоцена, которые к северу сменяются на кремнистые⁽⁵⁾. Поэтому для правильного понимания стратиграфии палеогена приаральских и смежных регионов очень важно установить положение нуммулитовых известняков в разрезе и их взаимоотношение с подстилающими и перекрывающими толщами.

Положению известняков с нуммулитами на Мангышлаке уделено много внимания в последней литературе^(3,4,6). Н. Ф. Кузнецова выделила их в гвимровскую свиту⁽⁴⁾, которая отнесена к нижнему эоцену. В Северном Приаралье выходы нуммулитовых известняков известны в верховьях балки Ак-Куурдан⁽⁶⁾. Положение их до сих пор оставалось не вполне ясным, и нуммулитовый горизонт помещали то в среднюю часть разреза морского палеогена, то в его основание. Это давало повод по-разному подходить к оценке возраста различных горизонтов палеогеновых отложений Северного Приаралья и затрудняло межрегиональные сопоставления.

Автор подробно описал разрезы верхов мела и палеогена по восточному склону г. Тасаран и в балке Ак-Куурдан. Для выяснения взаимоотношения нуммулитовых известняков с подстилающими и покрывающими породами были пройдены шурфы. В результате в балке Ак-Куурдан вскрыт следующий разрез (снизу):

К а м п а н

1. Песок ржаво-желтый, тонкозернистый, слабо глинистый; вскрыто 1,0 м.
2. Песок ржавый, тонкозернистый, глинистый, с тонкими прослойками коричневой глины 0,2 м.
3. Песок светлый желтовато-серый, тонкозернистый, кварцево-слюдистый 0,7 м.

П а л е о г е н

Акжарская свита*

4. Конгломерат мелкогалечный, состоящий из мелкой фосфоритовой гальки, сцементированный буровато-серой глиной, с прожилками и включением ожелезненного гипса. Встречаются железисто-гипсовые концентрации и гальки светлосерого мергеля 0,06 м.
- Конгломерат ложится на размытую поверхность пород кампана (рис. 1).

* По терминологии для Восточного Приаралья^(2,3).

5. Глина темно-серая, сильно песчанистая с морскими ежами, гипсом мелкой окатанной фосфоритовой галькой, ядрами пеллеципод, теребратулы, катунами коричневой глины; встречена *Gyrhаса sp.* 0,12
6. Глина темно-серая, сильно песчанистая, слоистая, с тонкими прослойками песка, кварцево-глауконитового, тонкозернистого 1,6
7. Песок серый, кварцево-глауконитовый, тонкозернистый, слабо глинистый, с пятнами более светлого тона. 0,3
8. Песок серый, кварцево-глауконитовый, тонкозернистый, слабо уплотненный с пятнами более светлого тона 1,6

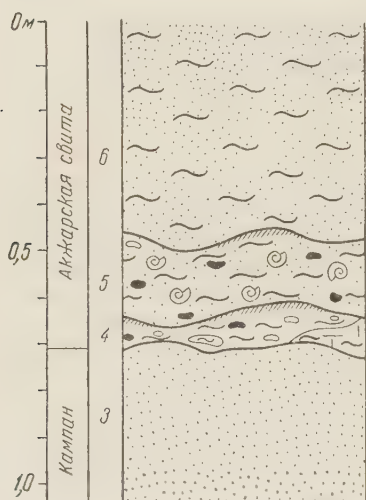


Рис. 1. Зарисовка контакта акжарской свиты с подстилающими породами кампана по западной стенке шурфа в балке Ак-Куурдан. 3—6 — номера слоев в тексте

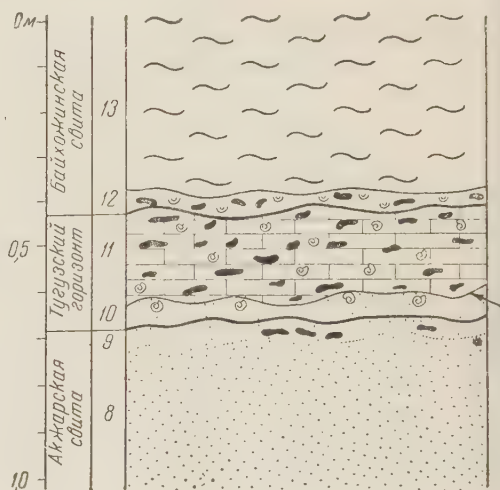


Рис. 2. Зарисовка контакта нуммулитовых известняков с акжарской и байхожинской свитами в балке Ак-Куурдан. 8—13 — номера слоев в тексте

9. Песок ржаво-желтый, тонкозернистый с редкими желваками фосфорита 0,05—0,06

Тугузский горизонт.

10. Песок зеленый, глауконитовый, лежит на неровной поверхности слоя 9 (рис. 2), выполняя карманы размыва. В самой верхней части иногда содержит фауну нуммулитов 0,05

11. Известняк желтовато-бурый, нуммулитовый с желваками фосфорита. Встречается фауна пеллеципод и зубы акул 0,1—0,2

Лежит на неровной поверхности слоя 10.

Байхожинская свита

12. Слой фосфоритовых желваков, сцементированных сильно ожелезненным гипсом. Встречаются обломки нуммулитового известняка. В кровле тонкая (до 3 мм) корка гипса 0,05—0,06

13. Глина коричневатая-серая, листоватая, с налетами ярозита. По плоскостям наслоения с песком 4,9

Тасбулакская свита

14. Глина серая, с поверхности светлая зеленовато-серая, сильно песчаная, листоватая. В верхней части жирная с тонкими прослойками кремнистого песчаника 27,2

Сопоставление стратиграфических разрезов морского палеогена Приаралья ю

Отделы	Мангышлак (по Н. Ф. Кузнецовой (*))		Западное Приаралье мыс Ак-Тумсуз (по М. Е. Воскобойникову)	Южное Приаралье (по М. Е. Воскобойникову)	Восточное Приаралье (по М. Е. Воскобойникову)
	Южный	Северный			
Олигоцен нижний	Бурлин- ская свита Глины голубые	Глины зеле- новато-бурые с хадумской фауной	Чеганская свита Глины зеленые с прослоями анкеритовых ожелезненных конкреций	Чеганская свита Глины зеленые с прослоями анкеритовых конкреций	Чеганская свита Глины зеленые с прослоями анкеритовых конкреций
Эоцен	верхний	Адаевская свита	Онбайская подсвита Мергели глинистые свет- ло-серые, зеленоватые, внизу розоватые	Саксаульская свита Мергели глинистые, розо- вые с пятнами светло-зеле- новато-серого цвета	Саксаульская свита Мергели глинистые, светлые, зеленоватые-серые
		Монатинская подсвита Мергели белые, иногда розовые	Мынбулакская свита Мергели розовые с прослоя- ми белых	Мынбулакская свита Мергели розовые, иногда пепельно-серые	Мынбулакская свита Мергели розовые, иногда пепельно-серые
		Рыбная свита Мергели коричневые с про- слоями бентонитовых глин	Тасбулакская свита Мергели коричневые и серо- ватые-желтые с прослоями бентонитовых глин	Тасбулакская свита Мергели коричневые и жел- товато-серые с прослоями бентонитовых глин	Тасбулакская свита Мергели коричневые и жел- товато-серые с прослоями бентонитовых глин
	средний	Усакская (нижняя белая) свита Мергели белые, иногда известняки	Байхожинская свита Мергели белые в середине с прослоями темно-серых, черных и коричневатых-серых глин и глинистых мергелей	Байхожинская свита Мергели белые	Байхожинская свита Мергели белые
		Гвимровская свита Известняки желтовато-се- рые, иногда серые песчани- стые, нуммулитовые	Тугузский горизонт Известняки светло-серого цвета, нуммулитовые	Тугузский горизонт Известняк песчаный свет- лый зеленоватый-серый	Тугузский горизонт Известняк песчаный свет- лый зеленоватый-серый
	нижний	Гвимровская свита Известняки желтовато-се- рые, иногда серые песчани- стые, нуммулитовые	Тугузский горизонт Известняки светло-серого цвета, нуммулитовые	Тугузский горизонт Известняк песчаный свет- лый зеленоватый-серый	Тугузский горизонт Известняк песчаный свет- лый зеленоватый-серый
Палеоцен	Суллукапинская свита Пески кварцево-глаукони- товые с фосфоритовой галь- кой в основании. Фауна Gry- phaea ex gr. pomada Vial., Gr. sinzowi Netsch., Gr. mas- sagetica Vial et Born. и др.		В обнаженной части разреза аналогичные породы размыты	Акжарская свита Пески кварцево-глаукони- товые с фосфоритовыми кон- крециями. В основании кон- гломерат с фосфоритовой галькой	Акжарская свита Пески кварцево-глаукони- товые с фосфоритовыми кон- крециями. В основании кон- гломерат с фосфоритовой галькой

Мынбулакская свита

15. Глина светлая зеленовато-серая, алевролитистая. Содержит тонкие прослойки кремнистого песчаника с фауной *Nucula* sp. 14,4 м

Саксаульская свита

16. Сливной кварцитоподобный светло-серый песчаник 0,5 м
Из разреза видно, что на размытую поверхность пород кампана ложится пачка кварцево-глауконитовых песков акжарской свиты (слои 4—9), мощностью 3,73 м. Ни в нижней, ни в верхней части этой пачки нуммулитов не содержится. Появляются они лишь в самых верхах слоя 10.

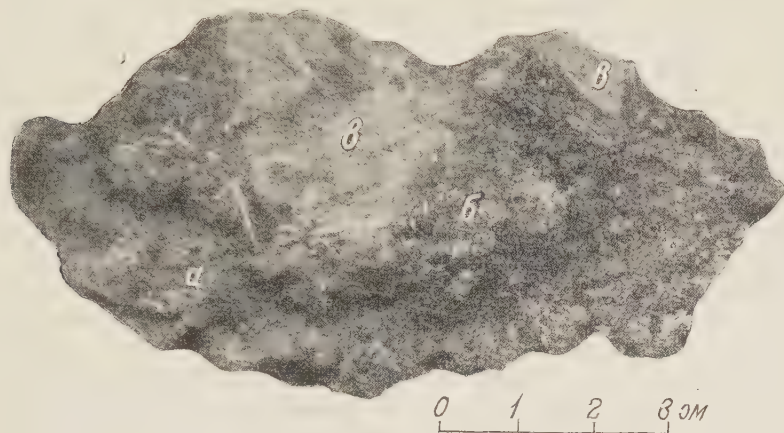


Рис. 3. Образец из контакта нуммулитового известняка с глауконитовым песком (место взятия его в шурфе показано стрелкой на рис. 2). а — глауконитовый песок слоя 10; б — глауконитовый песок слоя 10, содержащий фауну нуммулитов; в — нуммулитовый известняк слоя 11

В основании акжарской свиты залегает базальный горизонт мощностью 0,06 м (слой 4). В этом слое галька светло-серого мергеля, по-видимому, является продуктом перемыва отложений маастрихта, которые отсутствуют в балке Ак-Куурдан, и в ядре Тасаранской антиклинали.

Вышележащие нуммулитовые известняки, выделенные в тугузский горизонт, ложатся на размытую поверхность пород акжарской свиты. В основании этих известняков тоже залегает базальный горизонт (слой 10), представленный перемытыми кварцево-глауконитовыми песками акжарской свиты. В верхах этого горизонта и появляются нуммулиты (рис. 3).

Всюду для верхов акжарской свиты установлен горизонт фосфоритовых желваков, а обломочный материал в этих желваках такой же, какой имеют и вмещающие их пески. Учитывая это обстоятельство, нами было внимательно рассмотрено большое число фосфоритовых желваков, содержащихся в тугузском горизонте, но ни в одном из них не обнаружено раковин нуммулитов. Это приводит к выводу, что тугузский горизонт в балке Ак-Куурдан представляет собой не что иное, как базальный слой более мощного пласта (более чем 10—20 см) нуммулитовых известняков, верхняя часть которых размыта. Поэтому его можно сопоставить с базальным слоем на п. о. Куланды (мыс Изенды), где в основании пачки нуммулитовых известняков лежит бурый конгломерат, содержащий фауну *Pycnodonta vesicularis* Lam., *Belemnitella mucronata* Schlot., *Rinchonella* sp. и морских ежей. Цементом этого конгломерата является известняк, содержащий мелкие нуммулиты. Мощность этого слоя меняется от 0,15 до 1,0 м.

У подножья г. Тасаран, в ядре антиклинали, ни кварцево-глауконитовых песков акжарской свиты, ни нуммулитовых известняков не сохранилось.

Они полностью размыты. Продукты размыва акжарской свиты и тугузского горизонта сохранились в базальном слое байхожинской свиты, который налегает непосредственно на пески кампанского яруса, аналогичные описанным в слоях 2 и 3. На находку куса нуммулитового известняка с фосфоритовым желваком из этого слоя указывал А. Л. Яншин ⁽⁷⁾.

Базальный слой байхожинской свиты (слой 12) в балке Ак-Куурдан отличается от такого же слоя на г. Тасаран тем, что он содержит продукты размыва только одного тугузского горизонта.

Таким образом, стратиграфическое положение нуммулитовых известняков балки Ак-Куурдан и их взаимоотношение с ниже- и вышележащими породами, совершенно таково же, какое наблюдалось ⁽³⁾ на Мангышлаке и в Восточном Приаралье.

Описанное нами, а также данные по смежным регионам ⁽³⁾ позволяют сделать следующие выводы.

1. Пачка кварцево-глауконитовых песков акжарской свиты не может быть прибрежной фацией тасаранской свиты, а является самостоятельной стратиграфической единицей — более древней, чем нижнеэоценовые нуммулитовые известняки Мангышлака ^(3,4), Северного и Западного Приаралья.

2. Нуммулитовые известняки (тугузский горизонт) не являются антиклинальной фацией тасаранской свиты — это также совершенно самостоятельная стратиграфическая единица.

3. Вышележащие коричневатые-серые глины нельзя объединять в одну свиту с кварцево-глауконитовыми песками акжарской свиты и с нуммулитовыми известняками тугузского горизонта. Это тоже самостоятельная стратиграфическая единица.

В результате уточнения положения нуммулитовых известняков представлялась возможность сопоставить стратиграфическую схему палеогеновых отложений Северного Приаралья со смежными регионами (см. табл. 1).

Институт геологических наук
Академии наук КазССР

Поступило
18 XII 1957

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ Е. П. Бойцова и др., Тр. ВСЕГЕИ, нов. сер., 5 (1955). ² М. Е. Воскобойников, Вестн. АН КазССР, № 5 (1956). ³ М. Е. Воскобойников, Изв. АН КазССР, сер. геол., в. 25 (1956). ⁴ Н. Ф. Кузнецова, ДАН, 82, № 1 (1952). ⁵ В. В. Лавров, Морской палеоген Зауральских равнин и его континентальные эквиваленты, Алма-Ата, 1957. ⁶ А. Л. Яншин, Бюлл. МОИП, отд. геол., 25 (4) (1950). ⁷ А. Л. Яншин, Геология Северного Приаралья, М., 1953.

Р. Г. ГАРЕЦКИЙ, В. И. САМОДУРОВ и А. Л. ЯНШИН

МОРСКИЕ АЛЬБСКИЕ ОТЛОЖЕНИЯ НА ЗАПАДНОМ БЕРЕГУ АРАЛЬСКОГО МОРЯ

(Представлено академиком Н. С. Шатским 13 XI 1957)

Известно, что берега Аральского моря почти нацело сложены третичными породами, и лишь в местах пересечения береговыми обрывами (чингами) участков антиклинального строения в нижней их части выходят породы меловой системы. Таких участков в пределах береговой линии Аральского моря существует всего три: на северном берегу — на полуострове Куланды, на южном берегу — на полуострове Токмак-Ата и на западном берегу — в районе мыса Ак-Тумсук. На последнем участке береговая линия течет Кассарминскую брахиантиклиналь*.

Наиболее древние отложения, выходящие на поверхность на полуострове Куланды, согласно имеющимся в литературе данным, принадлежат среднему альбу⁽¹³⁾. На полуострове Токмак-Ата известны выходы сеномана, описанные еще Л. С. Бергом⁽²⁾ и А. Д. Архангельским⁽¹⁾.

Что касается мыса Ак-Тумсук, то выходы здесь мезозойских отложений были обнаружены еще в 1848 г. А. И. Бутаковым⁽³⁾, однако Г. В. Абих⁽¹⁴⁾, неправильно определивший сенонскую *Gryphaea visicularis* Lam. как юрскую *Gryphaea dilatata* Sow., ошибочно отнес их к оксфорду. Версия о существовании на западном берегу Арала выходов верхней юры вошла во многие сводные работы, хотя О. С. Вялов в 1935 г.⁽⁵⁾ писал, что она не может считаться правильной.

По данным Л. С. Берга⁽²⁾, изучавшего берега Аральского моря в начале XX века, в районе мыса Ак-Тумсук из-под очень мощного сармата (около 100 м) выходят глауконитовые пески с фосфоритами, фауну которых он считал туронской, а А. Д. Архангельский⁽¹⁾ — сеноманской.

В 1934 г. А. И. Смолко⁽⁹⁾ отметил, что на мысу Ак-Тумсук выходят не пески с фосфоритами, а мелоподобные мергели, и выразил сомнение в их уронском или сеноманском возрасте. В следующей своей работе⁽¹⁰⁾ он же определенно отнес эти мергели к верхнему сенону, а залегающие выше их карбонатные песчаники с наutilusами — к датскому ярусу.

Однако А. Л. Яншин⁽¹³⁾ указал, что горизонт с наutilusами расположен на самом деле примерно на границе среднего и верхнего эоцена, а отложения датского яруса на мысу Ак-Тумсук вообще отсутствуют. По мнению А. Л. Яншина, мелоподобные мергели и известняки, выходящие в основании береговых обрывов мыса Ак-Тумсук, должны быть отнесены к маастрихту.

Наконец, в 1954 г. Е. А. Жуковой были опубликованы данные о фораминиферах из разреза меловых отложений мыса Ак-Тумсук. Е. А. Жукова пришла к выводу, что основная часть мергелей этого разреза принадлежит нижнему кампану, и только самая верхняя их часть, представленная розовыми мергелями, возможно, должна быть отнесена к верхнему кампану.

Таким образом, наличие выходов пород, более древних, чем сеноман, в районе мыса Ак-Тумсук никем не предполагалось, да и наличие здесь сено-

* Ранее эта структура одним из нас^(11,12) именовалась Ак-Тумсукской.

мана и турона более поздними исследователями (^{7,9,10,13}) подвергалось сомнению.

Вовремя исследований, произведенных в районе мыса Ак-Тумсук в 1954 г. авторам настоящей статьи удалось выяснить причину столь значительных расхождений в трактовке разреза развитых здесь меловых отложений. Оказалось, что они выходят в основании восточных чинков Устюрта на протяжении более 25 км от мыса Ак-Тумсук на юге до колодцев Кассарма на севере. На этом протяжении можно составить почти полный разрез верхнего мела и верхней части нижнего мела. Однако на самом мысу Ак-Тумсук из меловых отложений выходят над уровнем моря лишь мелоподобные мергели сенона (отсюда и название «Белый нос»). К северу в береговых обрывах слои медленно поднимаются, из-под уровня моря выходят все более древние горизонты меловых отложений, и в урочище Кассарма, при осмотре его с берега, более всего бросаются в глаза выходы фосфоритонесных глауконитовых песков с богатой фауной, по-видимому все же туронской, как думал Л. С. Берг, а не сеноманской, как полагал А. Д. Архангельский.

Различие в мнениях о разрезе меловых отложений района мыса Ак-Тумсук связано с тем, что А. И. Бутаков, А. И. Смолко, А. Л. Яншин и Е. А. Жукова осматривали выходы этих отложений на самом мысу, а Л. С. Берг несомненно высаживался на берег в районе урочища Кассарма, о чем можно судить и по фотографиям, приведенным в его работе (²). Однако в тексте он этого обстоятельства не отметил и описал фосфоритонесные пески урочища Кассарма как «выходы меловых пород в районе мыса Ак-Тумсук». За ним ту же версию повторил А. Д. Архангельский (¹), лично на западном берегу Аральского моря не бывавший.

А. Л. Яншин (^{11,12}) ранее видел выходы меловых отложений лишь на самом мысу Ак-Тумсук, почему и назвал существующее здесь антиклинальное поднятие Ак-Тумсукским. Он предполагал, что это поднятие имеет северо-северо-западное простираание и структурно связано с Чушкакульской антиклиналью. Свод поднятия, судя по залеганию сарматских отложений, он правильно наметил в районе урочища Кассарма. В связи с последним обстоятельством, которое подтвердилось новыми наблюдениями, а также для того, чтобы не путать описываемую антиклиналь с одноименной Ак-Тумсукской брахиантиклиналью, обнаруженной сейсморазведкой в северном чинке Устюрта, мы считаем возможным антиклинальную структуру района мыс Ак-Тумсук—колодец Кассарма впредь именовать Кассарминской. Как показали геофизические данные, Кассарминская антиклиналь не связана с Чушкакульской, а отделена от последней широтной Северо-устюртской депрессией.

По мере подъема слоев от мыса Ак-Тумсук к колодцу Кассарма из-под уровня моря на поверхность выходят все более древние отложения мела, и примерно в 9—9,5 км от мыса у основания обрывов из-под фосфоритонесных песков турона, появляются преимущественно песчаные осадки альба*. Отсюда вплоть до колодца Кассарма между оползневыми глыбами, сложенными обычно мелоподобными мергелями верхнего мела, встречаются небольшие обнажения альбских пород. В сводовой части Кассарминской антиклинали, примерно в 5 км от колодца Кассарма, кровля альбских осадков поднимается до 30 м над уровнем моря и затем постепенно вновь погружается, скрываясь под водами моря немного севернее этого колодца.

В связи с развитием большого количества оползней и разобщенностью обнажений альба трудно составить его послынный и полный разрез. Примерная последовательность пачек слоев альбских отложений к югу от колодца Кассарма следующая (сверху вниз):

1. Тонкое переслаивание темных глин и мелкозернистых желтовато-серых кварцево-слюдистых песков 5 м

* О находке альба в районе мыса Ак-Тумсук на западном берегу Аральского моря ранее упоминалось в статье одного из авторов (⁸).

2. Галечник, состоящий из плоской и округлой ожелезненной гальки сидеритизированных глин; преобладающий размер гальки равен 1—2 см (достигает иногда 10 см) 0,5 м.
3. Песок кварцево-слюдистый серый, мелкозернистый, рыхлый. В нижней части его появляются прослои темно-серых глин Видно 3 м.
4. Переслаивание темно-серых глин и кварцево-слюдистых мелкозернистых песков 7 м.
5. Песок кварцево-слюдистый, желтовато-серый, мелкозернистый, уплотненный, в верхней части с тонкими прослоями железистых плитчатых песчаников 3 м.

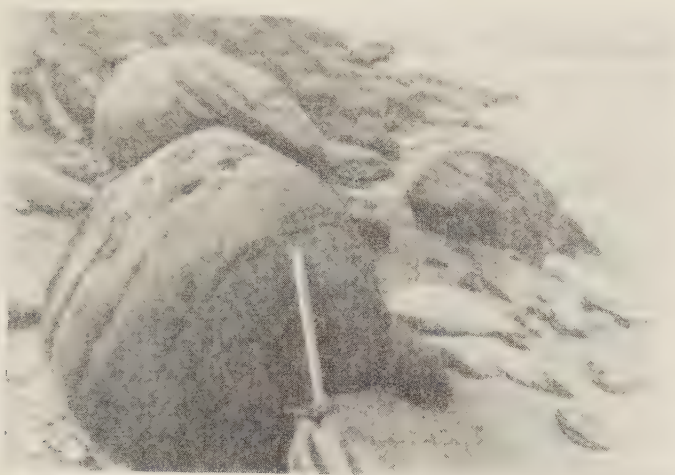


Рис. 1. Глыбы альбского песчаника на западном берегу Аральского моря севернее мыса Ак-Тумсу

В песке встречаются крупные (до 1—3 м) шарообразные конкреции кварцево-слюдистых мелкозернистых косослоистых железистых песчаников со следами ряби на поверхности скола. Эти песчаники в местах выходов альба часто образуют большие россыпи на берегу моря (рис. 1). Совершенно такие же песчаники встречаются в верхнеальбских отложениях полуострова Куланды и острова Возрождения ⁽¹³⁾.

6. Конгломерат, состоящий из ожелезненной гальки сидеритизированных глин 0,3 м.
7. Песчаник кварцево-слюдистый, серый, мелкозернистый 0,45 м.
8. Глина темно-серая, почти черная, слоистая Видно 0,5 м.
9. Глина темно-серая, почти черная, неяснослоистая, крупноплитчатая Видно 3—4 м.
10. В основании предыдущего слоя почти на уровне моря выходит слой ракушечника 0,35 м.

Общая мощность обнаженной части альбских отложений составляет не менее 30 м.

Из ракушечника слоя № 10 Т. А. Мордвилко были определены *Plicatula gurgites* Pict. et Roux. и *Exogyra* aff. *mordvilkoae* Musaf. Согласно ее любезному разъяснению, первый из этих видов широко распространен на юге СССР и в Западной Европе в отложениях среднего и верхнего альба и достаточно точно определяет возраст в пределах этих двух подъярусов. Второй вид наиболее близок к экзогире, которая была описана Музафаровой из нижнего альба Зиятдинских гор в Узбекистане и пока больше нигде не отмечалась. Вполне возможно, что этот вид не ограничен в своем распространении нижним альбом. К тому же форма из урочища Кассарма не вполне родственна ему. На основании изложенного можно утверждать, что уст-

ричник слоя № 10 несомненно относится к альбу, причем наиболее вероятно его среднеальбский возраст. Вероятно, к среднему альбу относятся также слои №№ 7—9. Более высокие слои описанного разреза, судя по их литологическому характеру, имеют континентальное происхождение и, скорее всего, верхнеальбский возраст.

Открытие морских слоев альба на западном берегу Аральского моря вместе с несколькими другими аналогичными находками последнего времени существенно меняет наши представления о палеогеографии равнин юго-западной части Казахстана на протяжении альбской эпохи. Известно, что на Чушкакульской антиклинали и почти на всем пространстве Северного Приаралья отложения альба имеют исключительно континентальный характер^(4, 13). Однако недавно было отмечено существование прослоев с неопределимой, но несомненно морской фауной в низах разреза альбских отложений полуострова Куланды⁽⁶⁾. Такие же прослои были встречены в альбских отложениях северных Кызыл-Кумов при бурении в районе бугра Ак-Кып в 120 км к югу от ст. Тюратам Оренбургской ж. д. На основании нахождения зерен первичного глауконита один из авторов⁽⁸⁾ считал, что морские слои возможно присутствуют в низах альба в нижнем течении р. Сыр-Дарьи. Таким образом, можно предполагать, что из района Мангышлака и низовьев р. Эмбы, где морские условия существовали в течение всего альба, в отдельные моменты альбской эпохи трансгрессии проникали далеко на восток вдоль того широтного прогиба, который с верхнепалеозойского времени отделяет складчатую систему Урала от герцинских складчатых сооружений Средней Азии.

Геологический институт
Академии наук СССР

Поступило
11 XI 1958

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ А. Д. Архангельский, Ископаемая фауна берегов Аральского моря, 1. Верхнемеловые отложения, в. 1. Изв. Туркест. отд. Русск. географ. о-ва, 8, в. 2 (1912).
² Л. С. Берг, Аральское море, Изв. Туркест. отд. Русск. географ. о-ва, 5 (1908).
³ А. И. Бутаков, Туркест. вед., № 48, 49, 50 (1872).
⁴ В. А. Вахрамеев, Региональная стратиграфия СССР, 1, Изд. АН СССР, 1952.
⁵ О. С. Вялов, Тр. Всесоюз. геол. разв. объедин., в. 319 (1935).
⁶ Р. Г. Гарецкий, О. А. Кузьмина, Бюлл. МОИП, отд. геол., 31, № 5 (1956).
⁷ Е. А. Жукова, Докл. АН УзССР, № 2 (1954).
⁸ В. И. Самодуров, Бюлл. МОИП, отд. геол., 30, в. 3 (1955).
⁹ А. И. Смолко, Тр. 1 конф. изуч. производит. сил Каракалпакск. АССР, 1, Изд. АН СССР, 1934.
¹⁰ А. И. Смолко, Нефт. хоз., 26, № 6 (1934).
¹¹ А. Л. Яншин, Изв. АН СССР, сер. геол., № 5 (1948).
¹² А. Л. Яншин, Сборн. памяти акад. А. Д. Архангельского, Изд. АН СССР, 1951.
¹³ А. Л. Яншин, Геология Северного Приаралья, М., 1953.
¹⁴ H. W. Abich, Beiträge zur Paläontologie des Asiatischen Russlands, 1, Mem. Acad. Sci., VI série, Sci. mathem. et phys., 7, (9), St.-Petersb. (1859).

Г. Х. ДИКЕНШТЕЙН

О ДРЕВНЕЙШЕМ ПРОГИБЕ НА ЗАПАДЕ РУССКОЙ ПЛАТФОРМЫ

(Представлено академиком С. И. Мироновым 7 I 1958)

Работами ряда исследователей в последнее время внесены существенные уточнения в стратиграфию палеозойских отложений запада Русской платформы. Наиболее важным является установление наличия мощной толщи осадков, залегающих между гдовскими слоями нижнего кембрия и кристаллическим фундаментом, которым дано различное наименование: полесский комплекс ⁽¹⁾, древнейший осадочный комплекс ⁽⁴⁾ и догдовский комплекс ⁽²⁾.

Гдовские слои, которые ранее считались наиболее древними, залегают на различных частях догдовского комплекса и в основании содержат конгломераты, что свидетельствует о перерыве в осадконакоплении между ними и нижележащими породами.

В целом отложения догдовского комплекса представлены в основном пестроцветными песчаниками, часто слабо сцементированными, различными по своему составу. По этому признаку Л. М. Левиной ⁽³⁾ удалось их расчленить на три свиты — городокскую, оршанскую и пинскую, имеющие самостоятельное стратиграфическое значение. Оршанская и пинская свиты были выделены А. С. Махначом и Е. П. Брунс, но рассматривались ими как одно-возрастные.

Городокская свита сложена полевошпатово-кварцевыми песчаниками, оршанская — однообразными кварцевыми разностями, пинская — полевошпатово-кварцевыми песчаниками. Последняя содержит гальки глинистых пород и обломки овручских кварцитов.

Такой состав упомянутых свит догдовского комплекса выдерживается на всей территории их распространения в западной части Русской платформы. Вопрос о возрасте этих пород в настоящее время является дискуссионным. Мы относим их к нижнему кембрию, учитывая отсутствие следов метаморфизма и наличие обломков протерозойских овручских кварцитов. Отложения догдовского комплекса вскрыты многими скважинами, частью которых они пройдены полностью. Некоторые данные приведены в табл. 1.

В результате картировочного бурения, проведенного на западном склоне Украинского кристаллического массива, материал по которому обработан И. Е. Стрелковой, Г. П. Шраменко и В. Г. Семеновым, установлено наличие мощной толщи красноцветных песчаников с обломками овручских кварцитов, залегающих под эффузивными породами. В сводном разрезе она достигает 625 м и по своему составу и положению в разрезе сравнивается с пинской свитой. Более древние толщи здесь отсутствуют. Мощность отложений догдовского комплекса убывает в южном направлении, и в бассейне Днестра

Таблица 1

Местоположение скважины	Мощность отложений догдовского комплекса, м
Городок	493*
Орша	326*
Минск	128
Смиловичи	410
Лучки	411
Пинск	375

* Полностью не пройдены

снижается до 40 м. К нему здесь относится нижняя часть лядавской свиты⁽²⁾, сложенная полевошпатово-кварцевыми песчаниками.

Таким образом, отложения догдовского комплекса, являющиеся наиболее древними в осадочной толще запада Русской платформы, широко распространены на этой территории. Они развиты в полосе, открывающейся на северо-восток в сторону Московской впадины, занимают центральную часть Белоруссии и далее на юг протягиваются вдоль западного склона Украинского кристаллического массива. Возможно наличие этих осадков также в

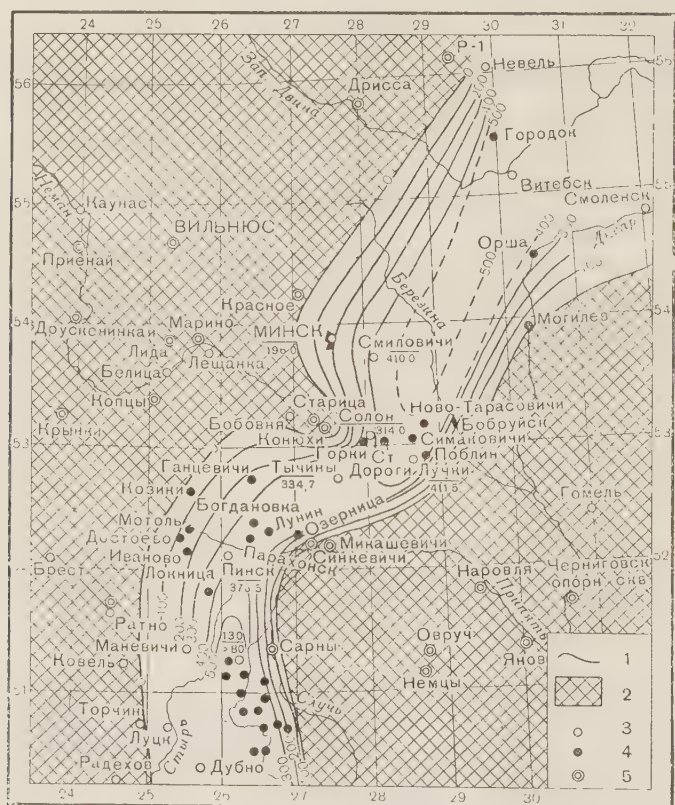


Рис. 1. Карта распространения догдовских отложений Прибалтики и Белоруссии: 1 — линии равных мощностей, 2 — площади отсутствия осадков, 3 — скважины, вскрывшие полную мощность догдовских отложений, 4 — скважины с неполной мощностью догдовских отложений; 5 — скважины, установившие отсутствие догдовских отложений

Молдавии и Одесской обл., где скважинами в Унгенах и Мирном установлены вероятные аналоги их в нижней части разреза, непосредственно над докембрийским фундаментом. Зона развития отложений догдовского комплекса при большой протяженности имеет сравнительно небольшую ширину в 150—180 км, сужаясь иногда до 100 км. К западу и северо-западу, а также к востоку и северо-востоку от зоны наибольшего прогибания происходит уменьшение мощности осадков до полного выпадения из разреза. В этих местах уже более молодые осадки залегают на докембрийском основании.

Следовательно, анализ мощностей осадков догдовского комплекса показывает, что к этому времени на западе Русской платформы приурочено формирование древнейшего прогиба фундамента и заполнение его терригенными пестроцветными породами. Прогиб этот на всем протяжении был сравнительно узким, что подтверждается характером распространения догдовских

осадков, показанных на рис. 1. Значительная часть территории запада платформы представляла собой в догдовское время приподнятую область докембрийского фундамента, поставившую материал для формирования осадков в зоне прогиба. Следует отметить линейный характер прогиба и протяженность его на значительное расстояние вдоль западного склона Украинского массива, который с этого времени и в течение всего палеозоя являлся устойчивой приподнятой областью.

Всесоюзный научно-исследовательский
геолого-разведочный нефтяной институт

Поступило
4 XII 1957

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ Е. П. Брунс, Сов. геол., № 59 (1957). ² Г. Х. Дикенштейн, Палеозойские отложения юго-запада Русской платформы, 1957. ³ Л. М. Левина, ДАН, 114, № 5 (1957). ⁴ А. С. Махнач, ДАН, 110, № 5 (1956).

Н. А. КУДРЯВЦЕВ

О БИТУМАХ В ЭФФУЗИВНЫХ ПОРОДАХ

(Представлено академиком Н. М. Страховым 10 I 1958)

В 1911 г. А. Брюн сообщил ⁽⁴⁾, что многие эффузивные породы — обсидианы, пехштейны, вулканические пеплы — содержат как возгоняемые битумы, так и битумы, экстрагирующиеся хлороформом. Содержание последних составляет, по его данным, 0,003—0,082% на породу. А. Брюн указывал, что извлеченные им битумы имели консистенцию вазелина, зеленую или коричневую окраску, не растворялись в воде, обладали большим, чем она, показателем преломления, давали на бумаге жирные пятна, горели светлым пламенем; по этим признакам А. Брюн считал их углеводородами. Химический состав битумов им не определялся.

Как это ни странно, сообщению А. Брюна не было придано значения, и его исследования не получили дальнейшего развития. Лишь Ф. Сакко ⁽⁵⁾ почти двадцать лет спустя, обсуждая в Трудах 15-й сессии Международного геологического конгресса проблему происхождения нефти, подтвердил данные А. Брюна относительно присутствия экстрагируемых битумов в лавах пеплах Везувия. Однако химический состав битумов им также не был исследован.

Учитывая большой научный интерес этих данных и большое их значение для правильных представлений об образовании нефти, автор отобрал для анализа различные эффузивные породы из их местонахождения в Армении — обсидианы, липариты, литоидную пемзу, андезиты, долериты, базальты, пехштейны. Кроме того, для анализов были использованы образцы обсидианов, базальтов, андезитов и долеритов с Ахалкалакского плато в Грузии, любезно предоставленные автору для этой цели работниками кафедры общей геологии Тбилисского государственного университета и ст. научным сотрудником Географического института АН ГрузССР М. Маруашвили.

Экстрагирование хлороформом собранных образцов пород, предварительно измельченных в порошок, и изучение извлеченных битумов производилось в битумной лаборатории Всесоюзного нефтяного научно-исследовательского геологоразведочного института под руководством Ю. Н. Петровой. Анализы некоторых битумов и их фракций в инфракрасной части спектра были проделаны в оптической лаборатории того же института Е. А. Глебовской.

Во всех образцах был обнаружен растворимый битум в количествах, выражаемых в тысячных (13 образцов) сотых (16 образцов) долях процента на породу. Возможно, что в восьми образцах, показавших высокое содержание битума, оно несколько завышено из-за малой их величины.

По внешнему виду извлеченные битумы по преимуществу были желтыми, парафинистыми. Битум из андезита между Аштараком и Талином был блестящий, вязкий, коричневый, из базальта в балке в 1 км к западу от сел. Кантан — прозрачный, светло-желтый.

Битумы из образцов долерита с Канакертского плато (содержание 0,012% и включения в черном пехштейне (содержание 0,031%) были подвергнуты

роматографическому анализу (аналитик И. П. Карпова), для которого ни, из-за малого количества, были соединены вместе. Элементарный анализ фракции, выделенной петролейным эфиром, показал следующее: С 80,10 %, Н 12,40 %. Столь высокое содержание водорода дает основание считать, что в значительной своей части указанная фракция битумов состоит из углеводов.

Она была изучена, кроме того, в инфракрасной части спектра. По заключению Е. А. Глебовской, в основном углеродном скелете «в значительном количестве представлены парафиновые структуры. По-видимому, присутствуют разветвленные структуры с группировкой $C(CH_3)_2$...Присутствуют заметное количество и ароматические структуры, по-видимому, смешанного, нафтеново-ароматического типа. Возможны неперехватываемые связи. Обычные кислотные группы — OH , $C=O$ — отсутствуют. Ввиду обилия интенсивных полос поглощения в области $1000—1400\text{ см}^{-1}$, свойственных не только разветвленным углеводородам, но и сульфонам, связи $C—O—C$ (простые эфиры) и связи $C—F$, Е. А. Глебовская допускает присутствие этих соединений.

В битуме, экстрагированном из обсидиана, обнажающегося у с. Ново-иколаевка (содержание 0,016%), по данным анализа в инфракрасной части спектра, преобладают, по заключению Е. А. Глебовской, парафиновые структуры; признаки присутствия ароматических структур в спектре весьма слабы. Ароматические структуры ряда бензола отсутствуют. Возможны неперехватываемые связи. Присутствует группа OH , в значительном количестве представлена группа $C=O$ (алифатические эфиры). Присутствие сульфонов возможно лишь в виде незначительной примеси. Е. А. Глебовская отмечает сходство этих битумов с битумами современных осадков.

Битумы, извлеченные из эффузивных пород Ахалкалакского нагорья в незначительном количестве (из-за малых размеров полученных образцов), совершенно недостаточном для индивидуальных анализов, были все объединены в одну пробу, за исключением обсидианов (т. е. 10 образцов). В этой пробе были определены элементарный состав (сжиганием в микроречи) групповой состав по Маркусону. В нефракционированном битуме оказались: С 75,29%, Н 11,17 %; групповой его состав (Н. А. Антоновская): фальтенов 4%, бензольных смол 20,1%, спирто-бензольных 13%, масла (по разности) 62,90%; последние по внешнему виду парафинистые, светло-желтого цвета. Анализ их в инфракрасной части спектра показал, что они держат в основном парафиновые структуры (длинные цепи группы CH_2). Ароматические структуры имеются только в виде следов. В большом количестве присутствуют группы $C=O$ и $C—O—C$ (эфиры), в небольшом количестве $C=O$ типа вторичного окисления и группа OH . По грубому подсчету Е. А. Глебовской, содержание кислорода в анализируемых маслах может быть порядка 3%, что соответствовало бы содержанию в них эфиров (восков) молекулярным весом 400 в количестве около 35% общего состава.

После анализа в инфракрасной части спектра масла были подвергнуты элементарному анализу сжиганием в микроречи. Его результаты: С 79,9%, Н 11,94% — близки к приведенным выше результатам анализа извлеченной петролейным эфиром фракции битумов долерита и пехштейна (из мени) и свидетельствуют, что масла битумов основных пород Ахалкалакского плато также в значительной своей части состоят из углеводов. Содержание углеводов и азота в маслах и битумах, за малым их количеством, не могло быть определено.

Для удобства сравнения результаты анализа битумов из основных пород оставлены в табл. 1 с результатами анализов битумов из осадочных пород, заимствованными из статей Н. Б. Вассоевича (^{1,2}) и с данными, полученными З. Л. Майминым (1955)*.

* Битумы четвертичных отложений (³) не сравниваются, так как они извлечены не хлороформом, а спирто-бензолом.

Таблица 1

Район	Откуда извлечен битум	Элементарный анализ, %				Компонентный анализ, %			
		C	H	O+H+S	C:H	масла	смолы бензолин.	смолы спирто-бензолин.	асфальтены
Сев. Кавказ									
Сунженский хребет	Глины среднего миоцена	78,56	10,8	11,36	7,2	43,33	21,22	23,77	11,6
Аджи	То же	21,24	10,8	7,96	7,5	56,08	12,37	19,72	5,8
Марьины колоды	" "	—	—	—	—	49,0	26,04	19,68	1,4
Волго-Уральская область									
Миннибаево №№ 114—118	Алевролиты глинистые (пашийские)	75,67	7,53	16,8	10,1	19,2	11,5	17,7	46,8
№ 102	Глина (живетская)	82,11	10,47	7,42	7,8	37,0	15,1	18,2	30,0
№ 134	Доманик (сланец)	81,82	10,61	7,57	7,7	46,4	14,8	13,4	21,0
Ахалкалаки	Эффузивные основные породы (соедин. проба)	75,8	11,17	13,03	6,8	62,90	20,1	13,0	4,0

Приведенные выше предварительные результаты изучения растворим битумов эффузивных пород показывают следующее. 1. В этих породах постоянно, но в неодинаковом количестве и, возможно, неравномерно содержатся рассеянные битумы, экстрагируемые хлороформом. 2. В битумах основных пород (долеритов, базальтов, андезитов и др.) присутствует значительное количество углеводов, преимущественно парафинового ряда. 3. Помимо углеводов, эти битумы содержат в большом количестве простые и сложные алифатические эфиры, другие сложные кислородные соединения углерода и т. п. 4. По своему компонентному составу битумы основных пород ближе к нефтям, чем битумы «несомненно нефтепроизводящих» среднемиоценовых глин Сев. Кавказа и девонских пород Волго-Уральской нефтеносной области. 5. В обсидианах, судя по полученным неполным данным, состав битумов иной — более кислого характера.

Таким образом, заключение А. Брюна о наличии в эффузивных породах углеводов подтвердилось. Их присутствие в этих породах является доказательством их образования при остывании магматических расплавов, притом, конечно, не только на поверхности, как это имело место для изверженных пород, но и на глубине. Однако на глубине, в условиях высокого давления, при котором температуры диссоциации углеводов повышаются, температура их образования должна быть выше, что не может не сказаться на общем их составе.

Следует полагать, что лава, из которой образовались исследованные породы, при своем движении отдала в атмосферу огромное количество различных газов, в том числе и диссоциированных углеводов (углеводородных радикалов). Следовательно, углерод и водород, послужившие для образования битумов в эффузивных породах, — это их остатки в магме, которой, в конечном счете, возникли эти породы. При остывании магмы на большой глубине выделяющиеся из нее углеводородные газы и свободный водород являются материалом, из которого в условиях высокого давления и в присутствии различных катализаторов, встречаемых газами, с понижением температуры по мере удаления от магматического очага или от глубинных интрузий могут возникать самые различные углеводороды и их соединения с другими элементами.

Дальнейшей задачей изучения битумов эффузивных пород является более подробный химический анализ битумов, индивидуально выделенных из различных пород, происходящих из различных районов, как нефтеносных, так и не нефтеносных. В программу изучения битумов должен обязательно входить хроматографический анализ фракции масел с выделением из них различных групп углеводородов и определением их общей формулы. В дальнейшем исследовании следует распространить на гипабиссальные изверженные породы, чтобы выяснить влияние условий их образования (более высокое давление и более медленное остывание) на количество и состав рассеянных в них битумов и углеводородной части последних.

Автор считает своим приятным долгом выразить признательность А. И. Месропяну, К. Г. Шириняну, Л. Маруашвили и сотрудникам кафедры общей геологии Тбилисского университета за содействие в отборе и представлении образцов пород, а также Ю. Н. Петровой, Е. А. Глебовской, И. П. Карповой и Н. А. Антоновской за выполнение лабораторных анализов.

Всесоюзный нефтяной научно-исследовательский
геологоразведочный институт

Поступило
6 I 1958

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Н. Б. Вассоевич, Сборн. Происхождение нефти, 1955, стр. 354. ² Н. Б. Вассоевич, Тр. ВНИГРИ, в. 83, 58 (1955). ³ В. В. Вебер, А. И. Горская, Е. А. Глебовская, Геология нефти, № 12 (1957). ⁴ А. Вгип, Les recherches sur l'exhalation volcanique, Paris — Genève, 1911. ⁵ F. Sasso, Intern. Geol. Congr., 15, Pretoria, 1929, 1930, pp. 299—301.

Ю. С. МАЙМИН

НЕКОТОРЫЕ НОВЫЕ ДАННЫЕ ПО СТРАТИГРАФИИ
ДЕВОНСКИХ ОТЛОЖЕНИЙ УЙМЕНЬСКОЙ ДЕПРЕССИИ
(ГОРНЫЙ АЛТАЙ)

(Представлено академиком С. И. Мироновым 9 I 1958)

Уйменская депрессия, расположенная на крайнем северо-востоке Горного Алтая, непосредственно к юго-западу от Минусинской котловины является одной из многочисленных межгорных впадин Саяно-Алтайской складчатой области. Депрессия простирается почти в меридиональном направлении, от верховьев р. Чуи на юге до истоков р. Бии на севере. Размеры ее невелики: с севера на юг около 250 км; с запада же на восток — в южной наиболее узкой части, 25—30 км, а на севере, где она расширяется и постепенно переходит в Лебедской прогиб, около 80 км.

Уйменская депрессия выполнена преимущественно девонскими образованиями, изучение которых было начато в 1953 г. коллективом геологов под руководством И. И. Белостоцкого⁽¹⁾. В результате их двухлетних исследований была создана первая стратиграфическая схема девона депрессии, правда, недостаточно детальная: в разрезе общей мощностью около 8 км было выделено только три свиты — сумурлинская, уйкараташская и учалская. Была также предпринята попытка сопоставить девонские образования Уйменской депрессии и Минусинской котловины.

В 1956 г. нами были начаты тематические исследования под общим руководством В. С. Мелещенко, имеющие целью разработать более детальную стратиграфическую схему девонских толщ Уйменской депрессии. Стратиграфическое расчленение девона затрудняется здесь чрезвычайно сильной фациальной изменчивостью слагающих его толщ, значительной дислоцированностью их, относительным однообразием литологического состава и широким распространением в разрезе эффузивных образований. Тем не менее, в результате изучения центральной части Уйменской депрессии, где разрез девона наиболее полон, нами получены материалы, позволяющие произвести в настоящее время более детальное и фаунистически более обоснованное стратиграфическое расчленение разреза девона. Поскольку имеющиеся данные позволяют с большой долей уверенности сопоставлять между собой девонские образования Уйменской и Минусинской впадин, для выделяемых нами свит временно принимаются наименования, заимствованные из схемы стратиграфии девонских отложений Минусинской котловины, разработанной В. С. Мелещенко и принятой в качестве унифицированной.

Ниже приводится краткая характеристика девонского комплекса Уйменской депрессии и его расчленение в соответствии с представлениями сложившимися у нас после двухлетних работ.

В основании разреза девона залегает мощная пачка пород, выделяемая нами в толчковскую свиту. Эта свита сложена преимущественно красными и розовыми мелко- и среднезернистыми песчаниками и плитчатыми алевролитами с подчиненными прослоями зеленовато-серых мелкозернистых песчаников, алевролитов, аргиллитов и мергелей. Для красноватых отло-

жений свиты характерны тонкая горизонтальная и разнообразная косая слоистость. На поверхности напластования наблюдаются знаки ряби и трещины усыхания Мощность около 650 м.

Вышележащая таштыпская свита резко отличается по литологическому составу от подстилающих ее отложений и представлена в основном известняками с подчиненными им прослоями мелкозернистых известняковистых песчаников и алевролитов. В известняках встречена фауна брахиопод и кораллов, которая в настоящее время изучается. По предварительному определению Э. Н. Янова, здесь присутствуют *Atrypa* ex gr. *reticularis* Linn., *A. cf. Kurbesekiana* Rzon., *Rhynchospirina* sp., *Karpinskia* (?) *fedorovi* var. *ivdelensis* Khod. и др. Этот комплекс фауны с большой долей вероятности свидетельствует о принадлежности данных отложений к эйфельскому ярусу Мощность не свыше 320 м.

Стратиграфически выше, без признаков несогласия, залегают образования, выделяемые нами в абаканскую свиту. Они представлены преимущественно эффузивными разностями: плагиоклазовыми порфиритами, их туфами, фельзитами, пироксеновыми порфиритами, иногда кислыми эффузивами и их туфами. Осадочные породы в разрезе свиты присутствуют в подчиненных количествах — это, главным образом, красноцветные конгломераты, гравелиты и крупнозернистые песчаники, значительно реже — алевролиты Мощность до 2000 м.

Вулканогенные образования абаканской свиты сменяются вверх по разрезу мощной толщей осадочных пород, выделяемых нами в асхизскую свиту. Основная роль в строении последней принадлежит серым и темно-серым алевролитам, чередующимся с серыми же и зеленовато-серыми мелкозернистыми песчаниками. Немаловажное значение имеют присутствующие главным образом в верхней части и в меньшей степени в низах свиты разноцветные песчаники и алевролиты. В резко подчиненных количествах отмечаются плагиоклазовые порфириты и их туфы.

Для серых алевролитов весьма характерна тонкая горизонтальная слоистость и блеклая желтая окраска выветрелой поверхности. Эти алевролиты, в основном в верхней части свиты, содержат плохой сохранности растительные остатки типа *Psilophyta* Мощность около 500 м.

На асхизской залегают илеморовская свита, связанная с нею постепенным переходом. Она сложена песчаниками различной зернистости, главным образом мелкозернистыми, и алевролитами. Окраска пород серая, зеленовато-серая, темно-серая, порой до черной. Алевролиты часто разлистованные, тонкослоистые, с обуглившимся растительным детритом и плохой сохранности псилофитовой флорой. В верхней части свиты наблюдаются пачки алевролитов с прослоями каменного угля. Для всех пород свиты характерна пиритизация. На плоскостях напластования алевролитов наблюдаются знаки ряби и трещины усыхания Мощность около 1350 м.

Разрез девона Уйменьской депрессии завершается бейской свитой, сложенной известняками с подчиненным развитием известковистых песчаников. Известняки массивные, узловатые, темно-серые, внешне не отличимые от известняков таштыпской свиты, прослоями переполнены фауной брахиопод, одиночных и колониальных кораллов, мшанок, члеников морских лилий. По определению Э. Н. Янова, из сборов 1956 и 1957 гг. здесь присутствуют: *Stropheodonta interstitialis* Phill., *Schizophoria striatula* Schloth., *Schelliwienella umbraculum* (Schloth.), *Streptorhynchus* (?) *devonicus* *ninussinensis* Rzon., *Plicochonetes setigera* (Hall.), *Productus* (?) sp., *Productella spinigera* Kindle, *P. spinulicosta* Hall., *Buxtonia* (?) sp., *Uncinulus goldfussi* (Schnur.), *U. parallelepipedus* (Bronn.), *Uncinulus* sp., *Euryspirifer cheehiel* (Kon.), *E. Cheehiel* (Kon.) var. *mesoloba* Korov., *Brachyspirifer seid* (Nal.), *B. martionofi* Stuck., *Cyrtina heterocliata* var. *intermedia* Dehl., *C. aff. leniplicata* Rzon., *Athyris* ex gr. *concentrica* (Buch.), *Atrypa* ex gr. *aspera* Schloth., *A. waterlooensis* Webst., *A. waterlooensis* var. *lebedanica* Rzon., *A. lancetoides* Nal., *Rhynchospirina* ex gr. *lopatini* (Stuck).

Кроме того, из сборов 1956 г. Б. С. Соколовым определены из известняков бейской свиты следующие табуляты: *Thamnopora beliakovi* Dubatolov., *T. cronigera* (d'Orbigny), *T. angusta* Lecompte, *T. nicolsoni* Frech., *T. reedi* Dubatolov.

Значительная часть фауны в настоящее время находится еще в определении, но приведенные списки не оставляют сомнения в принадлежности содержащих фауну известняков к верхам живетского яруса.

Бейская свита связана с подстилающими ее отложениями илеморовской свиты постепенным переходом, однако есть данные о том, что на окраине депрессии (район р. Кызылтобрак) она залегает непосредственно на образованиях кристаллического фундамента Мощность около 200 м.

Таким образом, в разрезе девона Уйменской депрессии нами выделяются шесть свит (снизу вверх): толочковская, таштыпская, абаканская, асқызская, илеморовская и бейская, причем две из них — таштыпская и бейская — охарактеризованы фаунистически.

Фауна бейской свиты, по заключению Э. Н. Янова, весьма характерна для верхов живетского яруса и с полной определенностью позволяет отнести эти отложения к верхнеживетскому подъярсу. Выделение И. И. Белостоцкого этих толщ в нижние горизонты франского яруса верхнего девона нами решительно отвергается, так как собранная фауна не содержит каких-либо верхнедевонских форм, за исключением, может быть, *Brachyspirifer seid*, встречающегося, впрочем, как на это указывает Э. Н. Янов, в верхнеживетских отложениях и других районов Горного Алтая.

Собранная нами фауна таштыпской свиты отличается крайней бедностью видового состава. К тому же в настоящее время определение ее еще далеко не закончено. Тем не менее, по предварительному заключению Э. Н. Янова, эта фауна не имеет ничего общего с верхнеживетской фауной бейской свиты. Присутствие форм, весьма сходных с *Atrypa Kurbesekiana* (эйфель, таштыпская свита Минусинской котловины) и *Karpinskia fedorovi* var. *ivdelensis* (нижний девон — эйфель), свидетельствует скорее об эйфельском возрасте таштыпской свиты Уйменской депрессии. Учитывая эти соображения, нельзя согласиться с мнением о принадлежности этой части разреза к верхнеживетскому подъярсу.

Таким образом, комплекс фауны, встреченный в отложениях бейской свиты Уйменской депрессии, надежно доказывает верхнеживетский возраст вмещающих толщ, а фауна таштыпской свиты с большой долей вероятности позволяет отнести последнюю к эйфельскому ярусу. Что касается остальных свит девона Уйменской депрессии, то в связи с их положением в разрезе между двумя фаунистически охарактеризованными толщами (верхов живета и эйфеля) и значительным сходством в литологии с одноименными свитами Минусинского девона вопрос об их возрасте решается с достаточной достоверностью. Исходя из этих соображений, бейская, илеморовская, асқызская и абаканская свиты должны быть отнесены к живетскому ярусу, а таштыпская и подстилающая ее толочковская свиты — к эйфельскому ярусу.

Наряду с весьма значительным сходством литологического состава выделяемых свит с соответствующими частями разреза среднего девона Минусинской котловины небезынтересно отметить и такой факт, как залегание бейской свиты на окраине Уйменской депрессии, так же как и в Минусинской впадине, непосредственно на кристаллическом фундаменте.

Всесоюзный научно-исследовательский
геологический институт

Поступило
7 I 1958

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ И. И. Белостоцкий, Сов. геол., 45 (1955).

Б. Г. СОКРАТОВ

О ВОСТОЧНО-КУБАНСКОЙ ВПАДИНЕ ЦЕНТРАЛЬНОГО ПРЕДКАВКАЗЬЯ

(Представлено академиком С. И. Мироновым 7 I 1958)

Восточно-Кубанская впадина протягивается полосой от места слияния р. Кубани и Лабы на западе, пересекает р. Кубань южнее Невинномыска и прослеживается дальше в сторону Кавказских Минеральных Вод. На севере впадина обрамляется Южно-Ставропольской валообразной структурой⁽³⁾, на юге сливается с нижнепалеогеновой моноклиной северного склона Кавказского хребта и ограничивается Адыгейским выступом, а на востоке замыкается Минераловодским палеогеновым выступом. На западе впадина затухает, сливаясь с северным склоном Азово-Кубанского краевого прогиба. В Центральном Предкавказье рассматриваемый тектонический элемент является наименее изученным.

Суждения о контурах и строении впадины высказывались ранее в ряде работ^(1, 2, 4, 7).

Современный структурный план Восточно-Кубанской впадины хорошо выявляется сейсмическим методом. По опорному отражающему горизонту, отвечающему верхам фораминиферовых слоев эоцена, рассматриваемый тектонический элемент рисуется весьма пологой структурой, длиной до 200 км.

Ширина впадины меняется от 50 км в западной части до 15—20 км — в восточной. Ее простираие подчинено очертаниям южного склона Южно-Ставропольской валообразной структуры. Для западной части падения северного и южного склонов впадины не превышают 2,5—3°. К востоку более крутым является северный склон, который при сочленении с Невинномысским поднятием представляет уже флексуру, осложненную продольным разрывом.

В осевой зоне оконтуриваются три прогиба: Воздвиженский, Советский и Беломечетский, выделенные М. Р. Пустильниковым⁽⁶⁾. По фораминиферовым слоям амплитуда их погружений не превышает 150—200 м. Данными сейсмики выявлено и в настоящее время подтверждается бурением осложнение Беломечетского прогиба поднятием куполовидной формы с амплитудой порядка 200—300 м (рис. 1).

Геологическими и сейсмическими данными установлен подъем оси впадины с запада на восток. Осевые зоны прогибов соответственно оконтуриваются изогидами опорного отражающего горизонта: —2350, —1900, —1100 м.

По кровле фораминиферовых слоев западная, наиболее погруженная часть рассматриваемой впадины приподнята по отношению осевой зоны краевого прогиба Западного Предкавказья на 1400—1800 м.

На дневной поверхности впадина выполнена средне- и верхнемиоценовыми и нижнеплиоценовыми отложениями, общая максимальная мощность которых для западной части не превышает 1000—1200 м. Восточнее меридиана Армавира плиоценовые отложения отсутствуют. Более древние осадки неогена и палеогена выделяются сейсмическими исследованиями, увязанными с глубокими скважинами, которые пробурены на Адыгейском выступе и поднятиях Южно-Ставропольской валообразной структуры.

По этим данным, мощность майкопских и эоцен-палеоценовых отложений в Восточно-Кубанской впадине не превышает, соответственно, 1000—1200 и 800—900 м. Майкопские отложения в северном направлении сокращаются до 700—900 м, а мощность палеоцен-эоценовых отложений в том же направлении увеличивается до 1200 м на Расшеватском поднятии. Общая мощность третичной толщи сокращается от 3000—3200 м в Воздвиженском и Советском прогибах до 2200—2500 м в Беломечетском.

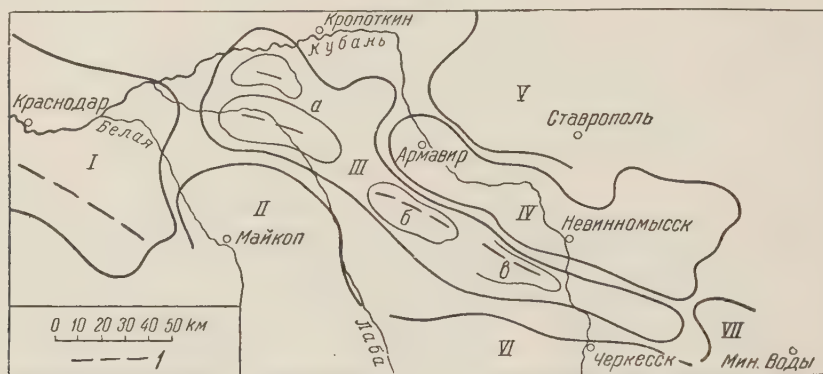


Рис. 1. Схема тектонических элементов юга Центрального Предкавказья. I — Азово-Кубанский краевой прогиб, II — Адыгейский выступ, III — Восточно-Кубанская впадина, IV — Южно-Ставропольская валообразная структура, V — Ставропольское поднятие, VI — Моноклираль северного склона Кавказа, VII — Минераловодский палеогеновый выступ; а — в — прогибы: а — Воздвиженский, б — Советский, в — Беломечетский; I — осевые линии прогибов

Существенное значение имеют данные по мезозойским отложениям, распространение которых с достаточной уверенностью может быть в настоящее время установлено в западной части впадины и на южном склоне Советского прогиба. В осевой зоне Воздвиженского прогиба, по данным сейсмоки, мощность меловых и юрских (?) отложений определяется в 1000—1300 м. При этом отмечается быстрое сокращение их мощности к северо-востоку, к склону Ставропольского сводного поднятия, которое происходит, по-видимому, за счет выпадения из разреза более древних его частей. Это находит подтверждение в неполных разрезах нижнего мела на Александровском и Расшеватском поднятиях, где он представлен только альбским ярусом, мощностью соответственно 50—80 и 120 м.

На юг и юго-запад, к Адыгейскому выступу, изменение общей мощности меловых и юрских (?) отложений происходит менее быстро. Но это справедливо, по-видимому, только для юры (?), неокома и, возможно, апта. Верхнемеловые отложения к Адыгейскому выступу выпадают из разреза. Уже на южном склоне Воздвиженского прогиба не был получен опорный сейсмический горизонт, отвечающий кровле верхнего мела, в то время как в осевой части и на северном склоне прогиба он хорошо выдержан. Отсутствуют верхнемеловые отложения в северной части Адыгейского выступа, где бурением доказано непосредственное перекрытие эоцен-палеоценовыми отложениями альб-аптской толщи.

Особенности строения осадочной толщи в Восточно-Кубанской впадине и сопоставление с разрезами ее в Ставрополье и на Адыгейском выступе позволяют предположить, что в западной своей части она возникла в нижнемеловую эпоху, по-видимому, в конце аптского и в альбское время, и что это связано с обособлением Ставропольского сводового поднятия от Западного Предкавказья. Возможно, формированием Воздвиженского прогиба в конце нижнего мела вызвано возникновение в палеозойском (б) складчатом основании расколов, которые могли послужить путями для подводных излия-

ний базальтов и спилитов, к образованию туфогенных отложений*. Эти эффузивы в пластовом залегании встречены в скважинах Александровского поднятия в преимущественно аргиллитовых отложениях, отнесенных к альбскому возрасту. В ряде случаев мощность покровных образований достигает 20—30 м. Существенно, что к востоку от Александровского поднятия эффузивы не были отмечены, что дает основание предположить возникновение расколов к западу от Александровского поднятия, т. е. по северному борту западной части Восточно-Кубанской впадины.

Основываясь на данных сейсмики, согласно которым мощность верхнего мела в осевой зоне Воздвиженского прогиба может достичь 300—400 м и которыми отмечается выклинивание этих отложений к югу и северу, возможно допустить дальнейшее развитие прогиба в верхнемеловое время.

По тем же материалам, меловые и, возможно, юрские отложения, мощностью до 800 м, участвуют в сложении южного склона Советского прогиба. К осевой части последнего сейсмоотражения, характеризующие мезозойскую часть разреза, испытывают общий подъем. Дальше к северу они отсутствуют, в том числе и на Александровском поднятии, где общая мощность меловых отложений, установленная бурением, не превышает 200—220 м. Эти данные требуют подтверждения бурением. Однако можно высказать предположение о несоответствии прогиба, установленного по третичным отложениям, прогибу по мезозойским образованиям.

Сопоставление особенностей строения, литологии и мощности осадочных толщ Восточно-Кубанской впадины и Азово-Кубанского краевого прогиба указывает на их отличие. Сейсмическими данными выявляется отсутствие структурной связи между ними. Еще более существенным является резкое отличие в глубинном строении этих двух крупных тектонических элементов, которое устанавливается гравиметрическими данными.

Гравитационное поле Восточно-Кубанской впадины характеризуется отрицательными аномалиями силы тяжести небольшой интенсивности. На общем отрицательном фоне, создаваемом значениями в —12,—16 мгл, выделяется ряд аномалийных участков, амплитуда колебаний значений силы тяжести в которых редко превышает 10 мгл. Аномалийные участки не выдерживают определенной направленности их простираций, имеют преимущественно округлые очертания и не несут существенных отличий от гравитационного поля северных районов Предкавказья, платформенное строение для которых доказано.

Азово-Кубанский краевой прогиб характеризуется отчетливо выдержанным «кавказским» простираем крупной отрицательной аномалии силы тяжести, протягивающейся из южной части Азовского моря к Адыгейскому выступу, у западного борта которого она замыкается. Осевая часть аномалии оконтуривается значениями изоаномал от —36 до —50 мгл.

Данными гравиметрии устанавливается разобщение впадины и краевого прогиба Адыгейским максимумом и южным окончанием Кропоткинского максимума силы тяжести.

Совокупность всех данных: гравиметрии, сейсмики и бурения — позволяет рассматривать Восточно-Кубанскую впадину как тектонический элемент эпигерцинской платформы и отрицать генетическую связь ее с Азово-Кубанским краевым прогибом.

Всесоюзный научно-исследовательский
геологоразведочный нефтяной институт

Поступило
4 XII 1957

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Геология СССР, 9 (1947). ² Ю. А. Косыгин, С. И. Горлов, Н. К. Карпенко, Изв. АН СССР, сер. геол., в. 4 (1955). ³ М. В. Муратов, Сов. геол. сборн. 48 (1955). ⁴ К. А. Прокопов, Зап. Горн. инст., 3, в. 1 (1910). ⁵ К. А. Прокопов, Гр. Грознефти, в. 8 (1937). ⁶ М. Р. Пустильников, Сов. геол., сборн. 57 (1957). ⁷ Е. А. Щерик, ДАН, 94, № 4 (1954).

* Данные и определения Н. Л. Нуткис.

Член-корреспондент АН СССР С. Ф. ФЕДОРОВ

УСЛОВИЯ ОБРАЗОВАНИЯ НЕФТЯНЫХ И ГАЗОВЫХ МЕСТОРОЖДЕНИЙ В РЯДЕ НЕФТЕНОСНЫХ ОБЛАСТЕЙ СССР

Каждая нефтегазоносная область по своему строению в деталях отличается от других. Отличия же геологического строения отражаются и на особенностях формирования залежей нефти и газа. Однако при сравнительном изучении условий образования залежей нефти и газа разных нефтегазоносных областей, наряду с особенностями удастся установить и ряд общих закономерностей.

Ухто-Печорская область. Ухтинское месторождение, расположенное на склоне Тиманской гряды близ свода антиклинального поднятия того же названия, содержит в девонских отложениях только

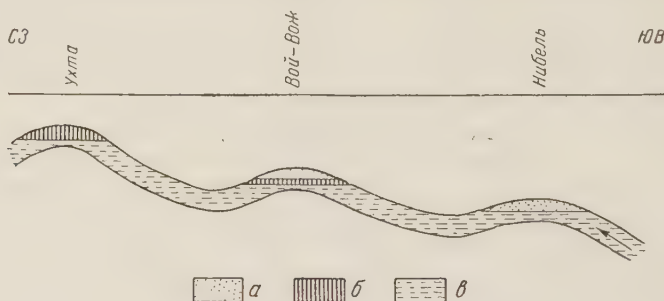


Рис. 1. Схема расположения залежей нефти и газа в Ухто-Печорском районе. а — газ, б — нефть, в — вода

нефть, к тому же очень густую. Вой-Вожское месторождение, расположенное гипсометрически ниже, содержит в девоне нефть с газом. Следующее к центру Печорской депрессии Нибельское месторождение содержит в девонских слоях только газ (см. рис. 1).

Создается следующая картина формирования залежей нефти и газа в этом районе. Нефть и газ образовались в Печорской депрессии, расположенной между Тиманским краем и Северным Уралом. Затем они стали мигрировать из депрессии — из зоны с большими пластовыми давлениями — вверх по региональному восстанию слоев и стали заполнять встречаемые на пути структуры. А как известно из работ В. П. Савченко⁽⁶⁾, В. К. Гассоу⁽²⁾, С. П. Максимова⁽⁴⁾ и других исследователей, ловушки, заполненные газом, уже не могут служить ловушками для нефти. Поэтому первые структуры на пути миграции нефти и газа оказались заполненными только газом, а следующие структуры, по мере расходования газа на наполнение первых из них, оказались заполненными газом и нефтью и, наконец, следующие вверх по региональному восстанию слоев в сторону Тиманского края структуры были заполнены только нефтью.

К у й б ы ш е в с к о е П о в о л ж ь е. На Самарской Луке, по направлению с востока на запад, расположены следующие месторождения нефтей в угленосной свите нижнего карбона C_1^h : Зольный овраг с нефтью уд. в.

0,831; Стрельненское — 0,848; Жигулевское — 0,856; Яблоновый овраг — 0,890; Березовское — 0,859; Карлово-Сытовское — 0,862; Губинское — 0,878; Сызранское — 0,883; Заборовское — 0,891 (см. рис. 2).

Таким образом, самая легкая нефть, содержится в Зольненском месторождении и самая тяжелая — в западной части Самарской Луки — в Сызранском и Заборовском месторождениях. Что касается месторождения Яблоновый овраг, нефть которого представляет исключение в этом ряду, то уже в 1952 г. мы ⁽⁸⁾ объяснили это тем, что структура Яблонового оврага сформировалась несколько позднее прилежащих к нему структур. Итак, по мере продвижения с востока на запад месторождения Самарской Луки характеризуются все более и более тяжелыми нефтями. Если же учесть Покровскую структуру, расположенную южнее Самарской Луки, с нефтями в карбоне с уд. в. 0,800, и группу месторождений Сергиевского района, расположенную северо-восточнее Самарской Луки, с нефтями в угленосной свите с уд. в. 0,900, то можно представить следующую картину формирования залежей нефти и газа в Куйбышевском Поволжье.

Нефтесорбной площадью, т. е. местом образования нефти и газа для большинства залежей Куйбышевского Поволжья (как было показано нами еще в 1954 г. ⁽⁹⁾), является Прикаспийская депрессия. Двигаясь вверх по региональному восстанию слоев, нефть и газ насытили вначале ближайшую к Прикаспийской депрессии Покровскую структуру. Затем начали насыщаться структуры восточной части Самарской Луки, а затем уже тяжелой нефтью без газа были насыщены структуры западной части Самарской Луки и Сергиевского района (Радаевка и др.). Мухановская группа структур в отношении нефтегазонасыщения находилась в положении, аналогичном структурам восточной части Самарской Луки или даже в еще более благоприятном.

Трудно предположить, чтобы вся огромная Прикаспийская депрессия содержала однородное исходное вещество для образования нефти и всюду совершенно идентичную геохимическую обстановку его преобразования. Поэтому естественно, что в разных залежах и структурах должны встречаться нефти неодинакового состава. Но основная обстановка формирования залежей нефти и газа имела все же общие черты для всей депрессии. Поэтому, например, вполне естественно ожидать встретить в структурах между Самарской Лукой и Мухановым, а также к югу от Муханова залежи легкой нефти, и далее (к югу от Муханова) чисто газовые залежи. Между Мухановым и Самарской Лукой особенно богатыми нефтью и газом должны быть литологические залежи. Эти залежи, кстати сказать, трудно выявить обычной геологической съемкой и геофизическими методами; их скорее можно установить непосредственно бурением — путем заложения профилей скважин между указанными пунктами, т. е. Мухановым и Самарской Лукой.

Саратовское Поволжье. Указанная закономерность формирования залежей нефти и газа применительно к Саратовскому Поволжью в общих чертах установлена нами еще в 1949 г. ⁽⁷⁾. Исходя из этой концепции мы рекомендовали развивать разведочные работы к югу и востоку от Саратова, т. е. в сторону Прикаспийской депрессии. Теперь эти положения полностью подтвердились. Так, расположенная на северной окраине г. Саратова структура Соколовой горы имеет в девонских отложениях нефть без газовой шапки,

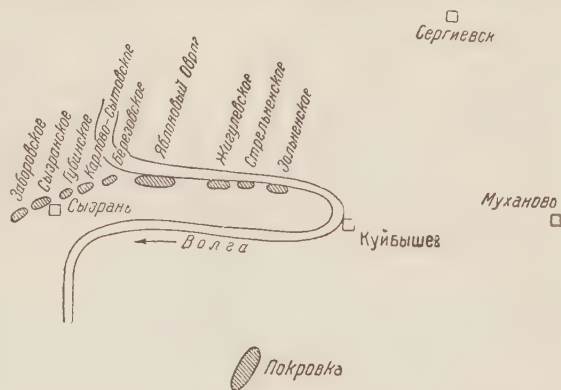


Рис. 2. Схема расположения некоторых нефтяных и газовых месторождений Куйбышевского Поволжья

а Степновское месторождение, расположенное в Заволжье, к востоку от Саратова, в девонских отложениях содержит газ с нефтью.

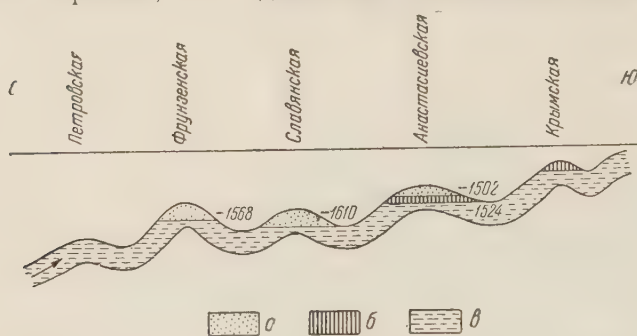


Рис. 3. Схема расположения залежей нефти и газа в Азово-Кубанской депрессии по линии ст. Петровская — ст. Крымская. а — газ, б — нефть, в — вода

Кубанская нефтеносная область. Разведочными работами установлено, что структуры, расположенные ближе к центру Азово-Кубанской депрессии, насыщены газом (Фрунзенская); далее к югу — в сторону Кавказского хребта структуры содержат газ с признаками нефти (Славянская), структуры, еще более удаленные от центра депрессии, содержат газ с промышленной нефтью (Анастасьевская) и, наконец, самые южные структуры, расположенные уже в предгорьях Кавказского хребта, по борту депрессии, содержат только нефть, как, например, месторождения района станицы Крымской (рис. 3).

Таким образом, и здесь мы наблюдаем ту же закономерность в формировании залежей нефти и газа, что и в ранее отмеченных нефтеносных областях. Правда, в месторождениях Нефтяно-Ширванского района, хотя и расположенных уже в предгорьях Кавказского хребта, т. е. в пределах южного борта депрессии, встречались залежи нефти с большим количеством растворенного в ней газа и даже мощные газовые шапки. Но это объясняется тем, что Нефтяно-Ширванский район находится в юго-восточной части Азово-Кубанской депрессии, и на пути миграции нефти и газа к этому району не было структур — надлежащих ловушек нефти и газа. К тому же структуры Нефтяно-Ширванского района относятся к структурам литологического типа: здесь газу и нефти некуда было двигаться. Этим можно объяснить и крайне высокое пластовое давление, доходившее здесь до 500 ат и более, а также и соответствующий режим залежей на указанных площадях. С Азово-Кубанской депрессией мы связываем и мощную газоносность Ставрополя: крупных размеров пологие структуры этого района — прекрасные ловушки для газа.

Ряд геологов (³, ¹⁰⁻¹²) подмечают ту же закономерность в формировании залежей нефти и газа в ряде районов Азербайджана. Так, А. Г. Дурмишьян отмечает увеличение газового фактора в залежах структур тектонических линий: Бинагады—Кара-Чухур и Кергез — Лок-Батан.

Особенно ярко эта закономерность проявляется, если рассматривать структуры Апшеронского полуострова, двигаясь в направлении Сураханы — Кала — Гоусаны, так же как и по линии Дуванный—Аляты—Нефтечала. Нефтедоборная площадь для месторождений Азербайджана, в особенности Апшеронского полуострова, располагалась в прилежащих частях, занятых теперь Каспийским морем: нефтематеринские породы для этого района установил еще И. М. Губкин, затем В. Э. Левенсон и недавно вновь подтвердил своими исследованиями Ш. Ф. Мехтиев (⁵). С точки зрения общепринятых представлений является «ненормальным» наличие газовых залежей на глубоко погруженной Кызыл-кумской структуре, нефтегазовых залежей в Кум-Даге и лишь признаков

Те же соотношения наблюдаются и по каменноугольным отложениям (Елшанка и структуры южнее Саратова) — Урицкое месторождение, Рыбешки и др. Закономерности формирования залежей нефти и газа на площадях Сталинградского правобережья в общих чертах изложены в работе (¹).

нефти, к тому же нефти густой, на высоко приподнятой Боя-дагской структуре в Западной Туркмении (рис. 4). Между тем, в свете предполагаемой концепции, такое расположение газовых и нефтяных структур в этом районе Туркмении представляется вполне закономерным. Нефтедоборная площадь расположена в пределах Каспийской депрессии и поэтому Кызылкумская структура, как самая глубокая, оказалась наполненной газом, а Кум-дагская, как далее расположенная и, к тому же, более приподнятая — газом и нефтью. На Боя-Даге была промышленная нефть, но это месторождение сильно эродировано: лишь в отдельных тектонических блоках Боя-Дага залежи нефти могли сохраниться до наших дней.

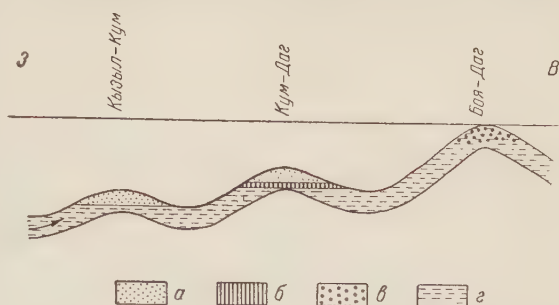


Рис. 4. Схема расположения залежей нефти в Западной Туркмении по линии Кызыл-Кум — Боя-Даг. а — газ, б — нефть, в — остатки густой нефти, г — вода

Выводы. В ряде нефтегазоносных областей СССР устанавливается следующая закономерность в формировании залежей нефти и газа. Нефть и газ образовались в депрессионных зонах. При движении вверх по региональному восстанию пластов первые структуры, расположенные на пути миграции, насыщаются газом, следующие — газом и нефтью (если газ не был весь израсходован на насыщение первых структур), дальнейшие — только нефтью. Иначе говоря, залежи нефти и газа в рассмотренных районах формировались по закону дифференциального траппирования^(2, 4).

Особенности геологического строения, обусловленные неодинаковой историей развития или иной области, могут несколько видоизменить и усложнить изложенную выше закономерность, но не могут существенно изменить ее. Изложенная выше закономерность формирования залежей нефти и газа может служить руководством к поискам новых нефтяных и газовых месторождений в рассматриваемых областях. Один пример мы рассмотрели при изложении вопроса о месторождениях Куйбышевского Поволжья. Далее, если в Кубанской депрессии, к югу от ее центральной части, установлены газовые, затем газо-нефтяные и, далее, нефтяные месторождения, то в сторону ее северного борта — если там будут установлены аналогичные фации и структуры, — можно рассчитывать обнаружить аналогичную закономерность в порядке зеркального отражения. То же самое, соответственно, будет иметь место и в других нефтегазоносных областях.

Разумеется, что в каждой геологической области, наряду с общерегиональными закономерностями, возможны локальные осложнения, своего рода микрозоны, не подчиняющиеся общей закономерности. Объяснение этих отклонений необходимо требует изучения истории геологического развития данной области.

Институт нефти
Академии наук СССР

Поступило
30 XII 1957

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ А. Г. Г а б р и э л я н, С. П. М а к с и м о в, Геол. нефти, № 5 (1957). ² W. C. G u s s o w, Bull. Am. Ass. Petr. Geol., May, 1954. ³ А. Г. Д у р м и ш ь я н, Журн. Азербайдж. нефт. хоз., № 9 (1957). ⁴ С. П. М а к с и м о в, Нефт. хоз., № 10 (1954). ⁵ Ш. Ф. М е х т и е в, Вопросы происхождения нефти и формирования нефтяных залежей Азербайджана, Баку, 1956. ⁶ В. П. С а в ч е н к о, Нефт. хоз., № 5 (1952). ⁷ С. Ф. Ф е д о р о в, А. И. К у т у к о в, Изв. АН СССР, сер. геол., № 3 (1950). ⁸ С. Ф. Ф е д о р о в, Вестн. АН СССР, № 11, 91 (1952). ⁹ С. Ф. Ф е д о р о в, Нефтегазоносность Урало-Волжской области, Изд. АН СССР, 1956. ¹⁰ М. Г. А г а б е к о в, Геология нефти, № 12 (1957). ¹¹ Э. Н. А л и х а н о в, Азерб. нефт. хоз., № 7 (1957). ¹² В. А. Г о р и н, Азерб. нефт. хоз., № 2 (1957).

А. А. ГЛАГОЛЕВ

ВЗАИМООТНОШЕНИЯ ЭГИРИНА И ЩЕЛОЧНОГО АМФИБОЛА В ЖЕЛЕЗИСТЫХ КВАРЦИТАХ КУРСКОЙ МАГНИТНОЙ АНОМАЛИИ

(Представлено академиком Д. С. Коржинским 17 XII 1957)

Эгирин и щелочные амфиболы образовались в железистых кварцитах в результате щелочного метасоматоза. В настоящей статье мы остановимся лишь на некоторых закономерностях этого процесса, не касаясь дискуссионного вопроса о причинах его проявления в железистых формациях. Щелочной метасоматоз в железистых кварцитах Старооскольского рудного района Курской магнитной аномалии (КМА), по материалу которого написана настоящая статья, не был очень интенсивным процессом. Обычно щелочные минералы располагаются в железистых кварцитах среди кварца, магнетита и гематита и очень редко образуют отдельные прослои. Метасоматические секущие тела, состав, структуры и текстуры которых резко отличались бы от вмещающих пород, на КМА вообще не встречены.

Химический состав и особенности эгирина и щелочных амфиболов КМА описаны нами совместно с Б. Д. Клагин* и поэтому излагаются здесь очень кратко. Эгирин представлен двумя разновидностями, между которыми вероятно, есть переходы. Разновидность I — почти бесцветный, неплеохроичный эгирин, без значительного количества примесей; разновидность II — зеленый, с заметным плеохроизмом эгирин, содержащий 36% молекулы диопсида (см. табл. 3). Щелочные амфиболы образуют два изоморфных ряда переходящих друг в друга:

- 1) Актинолит—родузит $(Ca_2(MgFe^{2+})_5Si_8O_{22}[OH]_2 - Na_2Mg_3Fe_2Si_8O_{22}[OH]_2)$
- 2) Родузит—рибекит $(Na_2Mg_3Fe_2Si_8O_{22}[OH]_2 - Na_2Fe_3Fe_2Si_8O_{22}[OH]_2)$.

Таблица 1

Теоретические составы наиболее часто встречающихся разновидностей эгирина и щелочного амфибола (мол. %)

Минерал	Формула	Na ₂ O	MgO	FeO	Fe ₂ O ₃	SiO ₂	H ₂ O	Fe _{общ}
Эгирин	NaFeSi ₂ O ₆	16,7	—	—	16,7	66,6	—	28,6
Железистый родузит	Na ₂ (Mg ₂ Fe) ₃ Fe ₂ Si ₈ O ₂₂ [OH] ₂	7,14	14,28	7,14	7,14	57,2	7,14	20,0

Эгирин и щелочной амфибол часто находятся в одной породе. Наблюдается чередование прослоев, содержащих то один, то другой из этих минералов или оба, но в разных соотношениях. Вероятно, они образовались одновременно, в одних и тех же условиях. Преимущественное образование в прослоях железистой формации эгирина или щелочного амфибола, очевидно, связано с первоначальным составом этих прослоев. Из табл. 1 видно, что эти два минерала отличаются присутствием в щелочном амфиболе воды,

* Сдано в печать в Записки Всесоюзного минералогического общества

закисного железа и магния, которые отсутствуют в эгирине и разными содержаниями натрия, окисного железа и общего железа. От первоначального соотношения в породе этих компонентов или части их может зависеть содержание эгирина и щелочного амфибола. Исключив из их числа воду и натрий, как вполне подвижные компоненты при щелочном метасоматозе, рассмотрим оставшееся — окисное, закисное и общее железо и магний. Можно было бы предположить, что так как в эгирин входит только окисное железо, а в щелочной амфибол — и окисное и закисное, то соотношение этих двух минералов определяется разным содержанием компонентов в исходной породе. Это предположение находит в разительном противоречии с наблюдаемыми фактами. Эгирин образуется не в гематитовых кварцитах, где содержание Fe_2O_3 максимальное (см. табл. 2), а по богатым закисным железом куммингтонитовым кварцитам. Ана-

Таблица 2

Содержание железа и магния (вес. %) в неподвергнувшихся щелочному метасоматозу породах железистой формации КМА и отношение их молекулярных количеств

	1	2	3	4
Fe_2O_3	7,63	25,35	31,52	37,0
FeO	27,85	16,39	15,26	11,15
$\text{Fe}_{\text{общ}}$	27,42	31,04	33,72	34,14
$\text{Fe}_{\text{сил}}$	10,16	3,07	1,11	0,58
MgO	6,80	3,03	2,56	2,05
$\text{Fe}_{\text{общ}}$				
$\frac{\text{MgO}}{\text{Fe}_{\text{сил}}}$	2,9	7,6	9,4	12,2
$\frac{\text{MgO}}{\text{FeO}}$	1,07	0,7	0,3	0,2
$\frac{\text{FeO}}{\text{Fe}_2\text{O}_3}$	8	1,4	1,06	0,6

Примечания. $\text{Fe}_{\text{общ}}$ — железо общее, входящее во все минералы, $\text{Fe}_{\text{сил}}$ — железо силикатных минералов.

1 — куммингтонитовые сланцы и куммингтонитовые кварциты (среднее из 4 анализов), 2 — куммингтонито-магнетитовые кварциты (среднее из 10 анализов), 3 — магнетитовые кварциты (среднее из 7 анализов), 4 — магнетито-гематитовые кварциты (среднее из 12 анализов).

эгирин же с тальком никогда вместе не встречаются. Графически зависимость парагенезисов от соотношения магния и железа показана на двухкомпонентной диаграмме (рис. 1).

Однако когда мы переходим от парагенетических ассоциаций к фактическому соотношению магния и железа в исходной породе, то наблюдается полное несоответствие этому правилу. Обычно в магнетито-гематитовых кварцитах, где отношение железа к магнию наиболее высокое (см. табл. 2), образуется ассоциация маложелезистого родузита с тальком, т. е. наиболее магнезиальная. Наиболее железистая минеральная ассоциация — эгирин вместе с железистым родузитом — развивается по куммингтонитовым (грюнеритовым) сланцам и кварцитам, где отношение железа к магнию значительно ниже, чем в породах других типов (табл. 2). Та же ассоциация развивается и по сидеритовым кварцитам — химическим аналогам куммингтонитовых (грюнеритовых) сланцев. Получается, что железистость и магнезиальность минеральных парагенезисов щелочного метасоматоза не соответствует фактическим соотношениям магния и общего железа в породах железистой формации.

Большая часть железа в рассматриваемых породах входит в состав рудных минералов: магнетита и гематита, оставшаяся часть находится в силикатах (главным образом в куммингтоните (грюнерите)) и в меньшей степени в карбонатах (анкерите и магнезиосидерите). Если мы возьмем отношение железа подвергающейся щелочному метасоматозу породы (за вычетом железа, входящего в магнетит и гематит) к магнию, — а в большинстве пород оно будет приблизительно соответствовать отношению железа к магнию, — то увидим, что это отношение падает в сторону магнетито-

гематитового кварцита и повышается к куммингтонитовым сланцам. Таким образом, парагенезисы щелочного метасоматоза связаны с соотношением

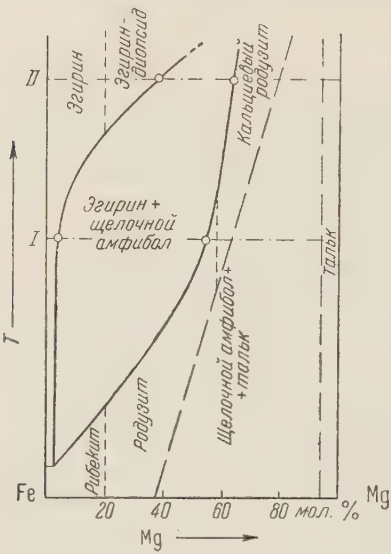


Рис. 1. Зависимость парагенезисов и состава минералов от температуры щелочного метасоматоза и соотношения железа (за вычетом железа магнетита и гематита) и магния в роде

магнетита в растворах повышенной щелочности, возможно — с другими причинами. Интересным является вопрос о составе щелочного амфибола, находящегося в равновесии с эгирином. Была сделана попытка получить мономинеральные фракции щелочных амфиболов из образцов, содержащих эгирины. До полной чистоты этот материал довести не удалось, была получена в одном случае смесь амфибола с 10% эгирина, а в другом — с 4% его. Так как эгирины из этих же образцов были проанализированы ранее, то оказалось возможным получить состав этих щелочных амфиболов путем вычитания из анализа смеси состава соответствующего эгирина. Эта операция проделана в табл. 4. Состав эгиринов помещен в табл. 3. Результаты анализа показали, что вместе с окрашенным эгирином, содержащим диопсидовую молекулу (табл. 3, II), встречается щелочной амфибол ряда актинолит — родузит

Формулы:

I. $(\text{Na}_{0,90}\text{K}_{0,02}\text{Ca}_{0,02})_{0,94}(\text{Fe}_{0,03}^{\text{II}}\text{Mg}_{0,02}\text{Fe}_{0,88}^{\text{III}}\text{Al}_{0,06})_{0,99}\text{Si}_{2,03}\text{O}_6; \frac{\text{Fe} \cdot 100}{\text{Fe} + \text{Mg}} = 96,2\%$

II. $(\text{Na}_{0,61}\text{Ca}_{0,34})_{0,95}(\text{Mg}_{0,31}\text{Fe}_{0,06}^{\text{II}}\text{Fe}_{0,61}^{\text{III}}\text{Al}_{0,04})_{1,02}\text{Si}_{2,01}\text{O}_6; \frac{\text{Fe} \cdot 100}{\text{Fe} + \text{Mg}} = 68,5\%$

Отсюда может быть сделан очень важный, по нашему мнению, вывод. Получается, что рудные минералы в реакциях щелочного метасоматоза почти не участвуют. Магнетит и гематит, оставаясь неравновесными с остальной частью породы, ведут себя индифферентно при этом процессе. Железо рудных минералов в основном в них и остается, переходя в другие минералы в незначительных количествах. Магнетит и гематит в породах железистой формации при щелочном метасоматозе, составляя часто около 50% породы, являются как бы реликтовыми минералами. Их очень медленное растворение не нарушает равновесия в остальной части системы, хотя постепенно сдвигает минеральные ассоциации в сторону увеличения железистости (к левой стороне диаграммы рис. 1).

Индифферентное поведение рудных минералов пока не может быть удовлетворительно объяснено. Возможно, это связано с плохой растворимостью магнетита и ге-

Таблица 3
Химический состав разновидностей эгирина

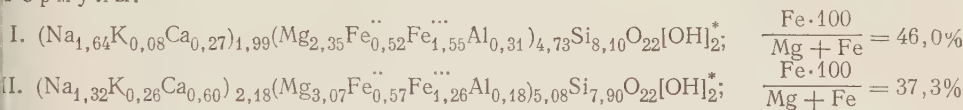
Оксиды	Разновидность I		Разновидность II	
	вес. %	ат. кол.	вес. %	ат. кол.
SiO ₂	53,46	890	53,67	893
TiO ₂	—	—	0,09	1
Al ₂ O ₃	1,32	26	0,03	9
Fe ₂ O ₃	30,98	388	21,54	270
FeO	1,09	15	1,84	25
MnO	—	—	0,06	1
MgO	0,38	9	5,51	136
CaO	0,40	7	8,34	149
Na ₂ O	12,36	398	8,42	270
K ₂ O	0,16	6	0,07	2
H ₂ O ⁺	нет	—	нет	—
H ₂ O ⁻	нет	—	0,10	—
	100,15	—	100,47	—

Таблица 4

Химический состав щелочных амфиболов, встречающихся вместе с эгирином

Окислы	Разновидность I					Разновидность II				
	смесь, вес. %	10% от состава — эгирин	разность	выч. со- став ам- фиб., %	атомн. колич.	смесь, вес. %	от 4% состава — эгирин	разность	выч. со- став ам- фиб., %	атомн. кол.
SiO ₂	58,15	5,35	52,80	58,46	973	56,29	2,15	54,14	56,34	938
TiO ₂	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Al ₂ O ₃	1,87	0,13	1,74	1,93	38	1,04	0,03	1,01	1,05	21
Fe ₂ O ₃	16,45	3,10	13,35	14,78	186	12,35	0,86	11,49	11,96	149
FeO	4,22	0,11	4,11	4,54	64	4,77	0,07	4,70	4,89	68
MnO	0,05	—	0,05	0,05	—	0,06	—	0,06	0,06	1
MgO	10,30	0,04	10,26	11,35	282	14,32	0,22	14,10	14,67	367
CaO	1,71	0,04	1,67	1,85	33	4,13	0,33	3,80	3,96	71
Na ₂ O	6,75	1,24	5,51	6,09	196	4,98	0,34	4,64	4,83	156
K ₂ O	0,45	0,02	0,43	0,48	10	1,36	—	1,36	1,42	30
H ₂ O ⁻	0,02	—	0,02	0,02	—	0,02	—	0,02	0,02	—
H ₂ O ⁺	0,40	—	0,40	0,44	50	0,77	—	0,77	0,80	88
	100,37	10,03	90,34	100		100,09	4,00	96,09	100,00	

Формулы:



* Так как в анализе явный недостаток воды, то формула рассчитана кислородным методом не учитывая воду.

(табл. 4, II), а вместе с эгирином без примесей (табл. 3, I) — амфибол ряда родузит-рибекит (табл. 4, II), близкий к родузиту. По оптическим данным установлено, что вместе с бесцветным эгирином иногда встречаются еще более железистые щелочные амфиболы. Геологическая позиция перечисленных ассоциаций говорит о разной температуре их образования. Ассоциация эгирина с кальциевым родузитом встречается на участках, где нещелочной метаморфизм проявился в образовании высокотемпературных минералов (роговой обманки и диопсида), и поэтому ее можно считать наиболее высокотемпературной. Бесцветный эгирин с родузитом имеют гораздо большее распространение, чем первая ассоциация. Они образовались при преобладающей температуре щелочного метасоматоза. При дальнейшем понижении температуры эгирин становится неустойчивым, и вместо него образуется маломagneзиальный щелочной амфибол — рибекит. На диаграмме рис. 1 показана зависимость состава эгирина и щелочного амфибола от температуры и зависимость минеральных парагенезисов от соотношения магния и нерудного железа, с одной стороны, и температуры процесса — с другой. Ко всем парагенезисам, при достаточном содержании в породе кальция, добавляется анкерит.

На изложенном выше примере установлена возможность применения анализа парагенезисов к некоторым неравновесным в целом породам. Это возможно в тех случаях, когда неравновесие связано с присутствием нескольких индифферентных минералов в породе, остальные минералы которой находятся в равновесии друг с другом. Выявление таких случаев может значительно расширить границы применения метода парагенетического анализа.

А. К. РЯБУХА

**РЕАКТИВНОЕ ТОРМОЖЕНИЕ КЛЕТОЧНОГО ДЕЛЕНИЯ
В ЭПИТЕЛИИ РОГОВИЦЫ ПРИ РАЗДРАЖЕНИИ ЖИВОТНЫХ
В УСЛОВИЯХ ПРЕДВАРИТЕЛЬНОГО ВВЕДЕНИЯ ГЛЮКОЗЫ**

(Представлено академиком Н. Н. Аничковым 27 I 1958)

Клеточное деление (особенно момент вступления клеток в деление) является одной из функций, требующей для своего осуществления значительных энергетических затрат (¹, ⁴). Рядом работ установлена зависимость клеточного деления от интенсивности углеводного обмена. Активность клеточного деления возрастает при большем содержании углеводов в пище (⁵, ⁶), а также при введении их подкожно (¹, ², ⁷). Наибольший интерес для нас представляют данные Буллоу и Айс (²) о том, что в момент функциональной активности животных запасы гликогена в тканях значительно снижаются. Параллельно с этим падает и митотическая активность. В период сна или покоя, когда запасы гликогена в тканях возрастают, наблюдается и высокий темп митотической активности. Эти данные позволяют допустить, что и в момент кратковременного возбуждения животных наступает обеднение тканей углеводами, уходящими в кровь.

В связи с этим у нас возникла мысль предупредить торможение клеточного деления в тканях, которое закономерно проявляется при болевом раздражении животных, введением в организм избытка глюкозы. Описания подобных наблюдений в литературе мы не нашли. Экспериментальное исследование в таком плане в значительной степени может помочь выяснить механизм реактивного торможения клеточного деления, определив роль углеводов в данной реакции.

Опыты проводились на белых крысах самцах весом 100—120 г (55 животных) и белых мышах самцах весом 16—20 г (76 животных). Каждая группа животных была разделена на три подгруппы. В первой из них животным вводили глюкозу за 2 часа до раздражения электрическим током, во второй — глюкоза вводилась за 3 часа, наконец в третьей (контрольной) подгруппе животные вместо глюкозы получали физиологический раствор. Во всех случаях возбуждение животных достигалось по методике, принятой в лаборатории проф. Г. С. Стрелина. Раздражение переменным электрическим током проводилось для крыс в течение 5 мин., а для мышей в течение 10 мин. Каждая крыса получала 1 мл, а мышь 0,5 мл 40 % глюкозы. Подогретый до 30—35° раствор медленно вводили в хвостовую вену.

Выбор продолжительности интервалов после введения глюкозы до начала раздражения отчасти обуславливался необходимостью исключить влияние на митоз болевого раздражения, наносимого самой инъекцией. Эта предосторожность является существенной, так как известно, что уже сама подготовка животных к той или иной процедуре приводит к снижению митотической активности (⁸) на 1—1,5 часа. В наших опытах с раздражением электрическим током, начинавшимся через 2 и 3 часа, мы могли уже не считаться с влиянием раздражения, обусловленного инъекцией.

Опыты проводились в одни и те же часы дня, чтобы исключить значение суточных колебаний митотической активности. Животных убивали

в 11—12 час. дня. Митотическая активность изучалась в эпителии роговицы. Методика раздражения животных, приготовления тотальных препаратов и подсчета митотических фигур подробно изложена в работе (9).

В предварительной серии опытов изучалось влияние инъекций глюкозы на митотическую активность без предварительных воздействий. Цифровой материал, полученный при подсчете фигур клеточного деления в эпителии роговицы у животных, которым вводилась глюкоза, и у контрольных, которым вводился физиологический раствор, приведен в табл. 1.

Таблица 1

Митотическая активность в эпителии роговицы крыс и мышей после внутривенного введения глюкозы *

Время после введения глюкозы, час.	Опыт						Контроль					
	число животных	число митозов					число животных	число митозов				
		П **	М	А	Т	всего		П	М	А	Т	всего
Крысы												
2	5	67,4	60,2	27,4	31,3	186,7	4	71,3	60,2	29,0	30,9	191,2
3	6	47,5	43,9	23,1	25,2	139,7	3	52,0	40,7	24,5	23,9	141,2
Мыши												
2	11	59,2	57,5	34,3	38,4	189,4	3	61,2	59,8	34,3	36,3	191,8
3	8	66,9	63,3	43,6	45,0	218,9	4	65,6	61,6	41,0	44,5	212,9

* Здесь и в следующих таблицах указано среднее число митотических фигур в пересчете на 100 полей зрения.

** П — профаза, М — метафаза, А — анафаза, Т — телофаза.

Из приведенных данных видно, что через 2 и 3 часа после внутривенного введения глюкозы как общее число клеточных делений, так и соотношение фаз митотических фигур в эпителии роговицы крыс и мышей заметно не изменяется. По данным Буллоу (1), митотическая активность (причем после введения крахмала) поднималась значительно только к 6 часам.

Полученные данные позволили перейти к изучению реакции торможения клеточного деления в эпителии роговицы при болевом раздражении животных переменным электрическим током на фоне предварительного внутривенного введения глюкозы. Материал фиксирован через 40 мин. после начала раздражения животных электрическим током. Результаты подсчета митотических фигур в этих опытах приведены в табл. 2.

Как видно из табл. 2, у контрольных животных, которым вместо глюкозы вводили физиологический раствор, под влиянием электрического тока произошло значительное торможение клеточного деления. Изменение в данном случае происходит главным образом за счет падения числа начальных фаз митоза (про- и метафаз), как и обычно в опытах с фиксацией материала, через 40 мин. после начала раздражения электрическим током.

Иную картину мы наблюдаем у животных, подвергнутых болевому раздражению, но получивших предварительно глюкозу. Способность к реактивному торможению клеточного деления у таких животных была значительно понижена. Это видно уже при сопоставлении общего числа митотических фигур в опытах с глюкозой и в контроле. Особенно отчетливо защитное влияние глюкозы обнаруживается при сравнении числа митотических фигур на ранних фазах.

В опытах с крысами, которым глюкоза была введена за 2 часа до нанесения болевого раздражения (табл. 2), число профаз оказалось сниженным в среднем на 30,8%; в то же время у контрольных животных это снижение достигало 92,6%. В опытах с мышами соответствующие величины равны

Таблица 2

Торможение клеточного деления в эпителии роговицы у крыс и мышей при раздражении электрическим током после предварительного введения глюкозы

		За 2 часа до опыта				За 3 часа до опыта			
		глюкоза		физиологич. раств.		глюкоза		физиологич. раств.	
		раздр. 5 мин.	без раздр.	раздр. 5 мин.	без раздр.	раздр. 5 мин.	без раздр.	раздр. 5 мин.	без раздр.
Крысы									
Число животных		6	3	4	3	10	5	3	3
Число митозов	П	46,3	66,7	5,3	71,6	25,4	45,5	4,8	52,0
	М	30,3	60,5	10,0	60,1	21,4	43,9	8,1	40,7
	А	18,2	23,5	13,5	29,0	14,9	24,5	12,2	24,5
	Т	32,9	30,9	30,8	30,5	25,3	25,2	26,9	23,9
Всего . . .		144,4	183,7	60,7	190,9	87,1	141,1	52,1	141,2
Мыши									
Число животных		8	11	4	6	6	8	3	5
Число митозов	П	46,6	59,2	7,4	60,8	47,4	66,9	5,3	65,7
	М	29,0	57,5	13,1	58,5	28,9	63,3	14,6	61,6
	А	28,4	34,3	22,2	33,6	24,2	43,6	28,4	41,5
	Т	40,7	38,4	40,5	39,7	39,7	45,0	45,6	44,5
Всего . . .		144,6	189,5	83,4	192,6	136,8	218,8	94,0	212,9

21,3 и 87,9%. Значительная разница наблюдается и при анализе числа метафаз. В опытах с 3-часовым интервалом между моментом введения глюкозы и раздражением электрическим током также имеется значительная разница в подавлении ранних стадий митоза у подопытных и контрольных животных. У крыс после введения глюкозы электрическое раздражение вызывало падение профаз на 44,2%, а у контрольных крыс на 90,8%; у мышей в опыте с глюкозой снижение числа профаз произошло на 29,2%, а у контрольных на 90,0%.

Несколько более слабое защитное влияние глюкозы в 3-часовых опытах по сравнению с 2-часовыми может быть, по-видимому, объяснено тем, что содержание глюкозы в организме после инъекции постепенно падало.

Из литературы известно, что введение адреналина приводит к подавлению митотической активности аналогично тому, которое наблюдается при болевом раздражении (¹⁰⁻¹³). Известно также, что раздражение животных приводит к увеличению секреции адреналина в организме. В связи с этим представляло интерес выяснить, препятствует ли предварительное введение глюкозы реактивному торможению клеточного деления, вызываемому

Таблица 3

Торможение клеточного деления в эпителии роговицы крыс адреналином после предварительного введения глюкозы

		Только физиолог. раствор	Только адреналин	Адреналин после глюкозы
Число животных		5	6	8
Число митозов	П	44,9	4,0	21,6
	М	44,1	8,9	25,2
	А	19,1	18,0	19,2
	Т	29,5	34,3	30,1
Всего . . .		137,6	65,2	96,1

действием адреналина так же, как оно препятствует подавлению митотической активности при болевом раздражении в описанных выше опытах.

Как и в случае с болевым раздражением, крысам раствор глюкозы в тех же дозах, как и раньше, вводили за 2—3 часа до опыта. Болевое раздражение было заменено инъекциями адреналина. Раствор адреналина вводили подкожно из расчета 100 γ на 1 кг веса животного за 40 мин. до фиксации материала.

Полученный цифровой материал, представленный в табл. 3, показывает, что в случае инъекций адреналина, как и при болевом раздражении, после предварительного введения глюкозы реактивное торможение клеточного деления в значительной степени оказалось ослабленным.

Подводя итоги полученным данным, мы приходим к выводу, что предварительное введение глюкозы крысам и мышам в значительной степени ослабляет реакцию торможения клеточного деления в ответ на раздражение электрическим током.

Предварительное введение глюкозы также блокирует (до известной степени) клетки от тормозящего влияния на митоз адреналина, вводимого подкожно.

Результаты наших исследований в совокупности с анализом литературных данных позволяют допустить, что торможение клеточного деления при введении адреналина и при болевом раздражении животных связано с изменением сахарного обмена в тканях.

Первый Ленинградский медицинский институт
им. И. П. Павлова

Поступило
21 XII 1957

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ W. B u l l o u g h, Nature, **163**, № 4148 (1949). ² W. S. B u l l o u g h, E. A. E i s a, J. exp. Biol., **27**, 257 (1950). ³ J. O. L a w s, J. Exp. Biol., **29**, 2 (1952). ⁴ И. А. У т к и н, Л. П. К о с и ч е н к о, Ю. П. Б у т н е в, Бюлл. эксп. биол. и мед., **42**, № 10 (1956). ⁵ Г. К. Х р у щ о в, Рефер. научно-иссл. работ АН СССР, 1945, стр. 288. ⁶ Е. С. Ц а р е в а, Сборн. рефер. научн. работ, Сталино, в. 1, 58 (1956). ⁷ W. B u l l o u g h, J. exp. Biol., **26**, № 1 (1949). ⁸ И. Б. Б ы ч к о в с к а я, Диссертация, Л., 1953. ⁹ А. К. Р я б у х а, ДАН, **104**, № 4 (1955). ¹⁰ J. F r i e d e n w a l d, W. B u s c h k e, Am. J. Physiol., **141**, 5, 689 (1944). ¹¹ W. S. B u l l o u g h, J. Endocrinol., **83**, 412 (1952). ¹² В. В. К о з л о в, Диссертация, Л., 1954. ¹³ Л. В. С у в о р о в а, ДАН, **110**, № 2 (1956).

К. В. КОСИКОВ и О. Г. РАЕВСКАЯ

ВЛИЯНИЕ КОНЦЕНТРАЦИИ СПЕЦИФИЧЕСКОГО СУБСТРАТА НА ИЗМЕНЧИВОСТЬ ФЕРМЕНТАТИВНЫХ СВОЙСТВ ДРОЖЖЕЙ

(Представлено академиком А. И. Опариным 7 I 1958)

Приспособительная изменчивость организмов — широко распространенное явление. Не возникает сомнений в том, что экспериментально можно получить организмы, приспособленные к различным, новым для них источникам питания, и устойчивые к ядовитым веществам. Однако на вопрос том, как происходит эта приспособительная изменчивость, различные исследователи отвечают по-разному.

В нашей отечественной литературе приводятся многочисленные данные направленной изменчивости микроорганизмов под влиянием различных внешних факторов. Получаемые при этом изменения рассматриваются как результат влияния измененных условий культивирования.

Много данных по вопросу об адаптивной изменчивости публикуется и в зарубежной литературе. Большинство зарубежных генетиков-микробиологов рассматривают приспособительную адаптивную изменчивость как результат спонтанных мутаций генов; присутствующему же в среде ядовитому веществу или новому субстрату отводится при этом роль только отбирающего фактора.

Проводившиеся одним из авторов (¹, ²), в течение последних лет экспериментальные исследования по направленному изменению ферментативных свойств дрожжей некоторых видов рода *Saccharomyces* показали, что под влиянием специфического субстрата в культуре возникают единичные клетки, способные сбраживать соответствующий сахар. В контроле не обнаружено подобных изменений, которые можно было бы объяснить появлением спонтанных мутаций.

Было установлено, что вновь возникшее свойство вырабатывать активный фермент и сбраживать соответствующий сахар устойчиво сохраняется при удалении из среды того сахара, к которому произошло приспособление (при замене его другим сахаром); это свойство наследуется не только при вегетативном, но и при половом размножении.

Полученные результаты дали основание предполагать, что изменчивость ферментативных свойств микроорганизмов связана с их функциональным состоянием, определяемым питательным субстратом. Известно, что присутствие в среде сбраживаемого сахара вызывает в дрожжевой клетке усиленную функцию по репродукции соответствующего фермента. Если же в ферментной системе клеток нет активного фермента, который мог бы гидролизовать находящийся в среде сахар, то среди таких клеток, как показали упомянутые выше опыты, появляются такие, которые начинают репродуцировать соответствующий, но не свойственный им ранее активный фермент. Следовательно, в данном случае активации субстрата ферментом предшествовало образование этого фермента в результате воздействия субстрата на ферментную систему клетки.

В таком случае естественно поставить вопрос, не будет ли влиять концентрация сахара в среде на функциональную деятельность ферментативной системы клетки и частоту появления клеток, способных сбраживать соответствующий сахар. Все предыдущие наши опыты проводились с концентрацией сахара, не превышающей 6%. Решено было провести опыты с повышенным содержанием в среде сахара, к которому предполагалось получить приспособленные формы.

Исходная культура дрожжей *S. globosus*, использованных в этих опытах, была получена из одиночной споры, выделенной при помощи микроманипулятора. При прорастании и размножении споры произошла диплоидизация, в результате образовалась диплоидная гомозиготная культура. Предварительная проверка на сбраживание 2% сахарозы в течение 20 суток показала, что культура не сбраживала этот сахар.

Было проведено два опыта с концентрацией сахарозы 1 и 20%. В обоих опытах в среду добавлялось 0,3% глюкозы и 5% дрожжевого автолизата. Глюкоза хорошо сбраживается исходной культурой, поэтому добавление ее в среду давало возможность клеткам размножиться и перестроиться на бродильный тип, что могло способствовать приспособлению их к сбраживанию сахарозы. Посев клеток производился с двухсуточной культуры по 1 петле.

1-й опыт производился в трубках Дунбара при объеме среды 7—8 мл. 2-й опыт проводился в пробирках с газоуловителями при объеме среды 30 мл. Культуры содержались при температуре 26—28°.

Таблица 1

Число приспособившихся к сбраживанию сахарозы культур *S. globosus* при ее различной концентрации в среде

	Опыт № 1		Опыт № 2	
Число культур в опыте	237	249	317	314
Концентрация сахарозы в среде, %	1	20	1	20
	1	36	9	70
Число забродивших культур *	0,4	14,8	2,9	19,1
Объем среды, мл	7—8		30	
Продолжительность опыта, сут.	46		60	

* Над чертой — абсолютные значения, под чертой — в процентах.

Результаты опытов представлены в табл. 1, из которой видно, что в 1-м опыте из 237 трубок на среде с 1% сахарозы брожение было отмечено только в одной, и то на 46 сутки, т. е. в конце опыта. В трубках с 20% сахарозы в тот же период времени брожение было отмечено в 36 случаях из 249, причем забраживание начиналось на 6—7 сутки и далее продолжалось в течение всего опыта. Такие же результаты были получены и во 2-м опыте.

Следует указать, что число клеток до начала забраживания в культурах как с 1% сахарозы, так и с 20% сахарозы было примерно одинаково.

Эти опыты ясно показывают, что увеличение концентрации сахарозы в среде приводит к значительному ускорению процесса приспособления культур к сбраживанию этого сахара.

Следующие, 3-й и 4-й, опыты были поставлены с рядом различных концентраций сахарозы в среде (от 2 до 66%) с целью выяснения, какая концентрация будет наиболее эффективной и как будет повышаться количество приспособленных культур при постепенном повышении концентрации сахара в среде.

Как и в первых двух опытах, кроме соответствующей концентрации сахарозы, в среду каждого варианта опыта добавлялось 0,3% глюкозы и 5% дрожжевого автолизата. Опыты проводились при 26—27°.

Результаты 3-го и 4-го опытов представлены в табл. 2. Они полностью подтверждают результаты 1-го и 2-го опытов, показывая, что по мере увеличения концентрации сахарозы в среде (до определенного предела) ускоряется процесс приспособления клеток сбраживанию этого сахара; частота возникновения клеток, способных сбраживать сахарозу, значительно увеличивается. Графически эти данные представлены на рис. 1: в условиях проведенных нами опытов число забродивших культур заметно увеличилось с повышением концентрации сахарозы в среде и достигло максимума при 34%.

При этой концентрации забродивших культур было 36,5%, в то время как при 2%-й концентрации сахарозы в среде забродивших культур было 1,3%. При дальнейшем повышении концентрации сахарозы в среде число приспособившихся культур уменьшилось, а при 58% совсем не было отмечено сбраживающих культур, хотя при этой концентрации сахарозы в среде ранее приспособленные к ней формы дают брожение.

Следует отметить, что число клеток в культурах (размножившихся за счет использования глюкозы) при различных концентрациях сахарозы в среде через 3 суток после посева было примерно одинаковым. Поэтому здесь нет оснований говорить о каком-либо преимуществе для отбора спонтанных мутаций при повышенной концентрации сахарозы в среде, если бы такие мутации возникали.

Можно сказать, что совокупность полученных в опытах результатов не только подтверждает ранее полученные данные о прямом действии специфического субстрата на наследственную изменчивость ферментативных свойств дрожжей, но и дает основание предполагать зависимость частоты возникновения этой изменчивости от количества растворенных в среде и реагирующих с протопластом клетки молекул углевода.

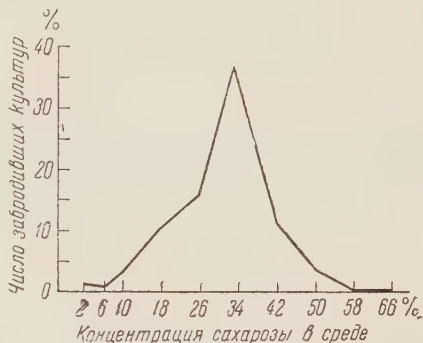


Рис. 1. Влияние концентрации сахарозы в среде на процесс приспособительной изменчивости дрожжей к сбраживанию этого сахара

Таблица 2

Концентрация сахарозы в среде, %	2	6	10	18	26	34	42	50	58	66
Число культур в опыте	151	156	154	151	152	156	151	150	153	52
Число культур, приспособившихся к сбраживанию сахарозы *	$\frac{2}{1,3}$	$\frac{1}{0,6}$	$\frac{5}{3,2}$	$\frac{16}{10,6}$	$\frac{24}{15,9}$	$\frac{57}{36,5}$	$\frac{17}{11,3}$	$\frac{5}{3,3}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$

* Над чертой — абсолютное значение, под чертой — в процентах.

Формально можно провести аналогию полученной зависимости изменчивости от концентрации углевода в среде с получаемой при действии ионизирующей радиации. В последнем случае также имеет место повышение изменчивости при увеличении дозы облучения. Однако природа изменчивости в этих случаях различна.

Если при действии ионизирующих излучений происходит в основном разрушение существующих в клетке структур, что практически приводит к утрате соответствующих функций, то при взаимодействии клетки с новым для нее специфическим субстратом в ней появляются новые функции, а в соответствии с этим возникают и новые структурные образования. При этом

изменения носят направленный характер, в соответствии с природой воз-
действующего субстрата.

На основании полученных данных можно сделать вывод о том, что измен-
чивость ферментативных свойств микроорганизмов связана с их функцио-
нальным состоянием, которое определяется питательным субстратом и усло-
виями культивирования. Полученные данные невозможно объяснить от-
бором спонтанных мутаций.

Соответствующий субстрат вызывает положительные приспособительные
изменения, новообразования.

Такого рода изменения, очевидно, и составляют основу для прогрес-
сивного развития организмов.

Институт генетики
Академии наук СССР

Поступило
6 I 1958

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ К. В. Косиков, ДАН, 80, № 1, 105 (1951). ² К. В. Косиков. Генетика дрож-
жей и методы селекции дрожжевых культур, Изд. АН СССР 1954.

В. П. ЛУФЕРОВ

**ВЛИЯНИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ НА ГАЗООБМЕН ЛИЧИНОК
НЕКОТОРЫХ PELOPIDAE (TENDIPEDIDAE, DIPTERA)**

(Представлено академиком И. И. Шмальгаузенем 29 I 1958)

Прямым показателем интенсивности газообмена является скорость потребления кислорода. Поэтому, выясняя влияние различных факторов среды на скорость потребления кислорода, мы тем самым определяем действие этих факторов на изменение интенсивности газообмена. Нами были поставлены опыты по влиянию температуры на дыхание личинок тендипедид подсемейства Pelopidae: *Procladius nigriventris*, *Pr. choreus* и *Ablabesmyia monilis* *.

Опыты ставились в микрореспирометре. Аппараты устанавливались в аквариуме-термостате, наполненном водой. Интенсивность дыхания каждого вида изучалась при семи постоянных температурах: 5, 10, 15, 20, 25, 30 и 35°. В опытах использовалась профильтрованная вода из Рыбинского водохранилища с содержанием кислорода 6—8 мг/л. Постоянство кислородного режима в опыте поддерживалось при помощи микропипетки, вводимой в капиллярные отводы микрореспирометра, через которую отсасывалась использованная вода и вводилась свежая.

Для выработки адаптации к температуре личинки предварительно не меньше двух-трех суток содержались при температуре предстоящего опыта. Исключение составляли опыты при 35°. Поскольку личинки при этой температуре существовать долго не могут, их в течение 1,5—2 суток содержали при режиме постепенного повышения температуры, а опыт начинался сразу по достижении 35°.

Продолжительность каждого опыта составляла 24—26 час. Регистрация показаний микрореспирометров при режиме 5 и 10° производилась с интервалом через 5 час., при 15° — через 2—5 час. и при более высоких температурах через 1—2 часа. В опыт вводились только накормленные личинки, однако в период опыта, т. е. в течение суток, личинки пищи не получали. Экспериментально нами было установлено, что голодание личинок даже в течение двух суток на интенсивность дыхания заметно не влияет. Поэтому мы считаем, что голодание личинок во время опыта не вносит существенных искажений в характер их дыхания. Всего по определению интенсивности дыхания произведено 122 круглосуточных опыта. Из них с личинками *Pr. nigriventris* поставлено было 54 опыта, с *Pr. choreus* — 28, а с *A. monilis* — 40 опытов.

Интенсивность дыхания выражается в миллиграммах поглощенного кислорода, отнесенного к грамму живого веса личинки.

* Личинки *Pr. choreus* и *Pr. nigriventris* очень близки друг к другу. Впервые описание их дано в недавно опубликованной работе Т. А. Мурагиной-Кореновой⁽⁴⁾, которая, однако, не приводит их в определительной таблице. Из описания личинок следует, что они отличаются друг от друга главным образом размерами лингвы и головной капсулы. По этому признаку различали их и мы, но так как крайние значения размеров сходятся (ширина головной капсулы, по Мурагиной-Кореновой, у *Pr. choreus* 0,69—0,75 мм, у *Pr. nigriventris* 0,75—0,90 мм), мы отбирали для опытов личинок *Pr. nigriventris* с наибольшей головной капсулой и *Pr. choreus* — с наименьшей.

Хищные личинки *Pr. nigriventris* и *Pr. choreus* в Рыбинском водохранилище встречаются обычно вместе и, как правило, вдали от берегов на заиленном дне открытых частей.

Личинки *A. monilis*, тоже являющиеся хищниками, напротив, обитают в прибрежной зоне на стеблях и листьях высшей водной растительности.

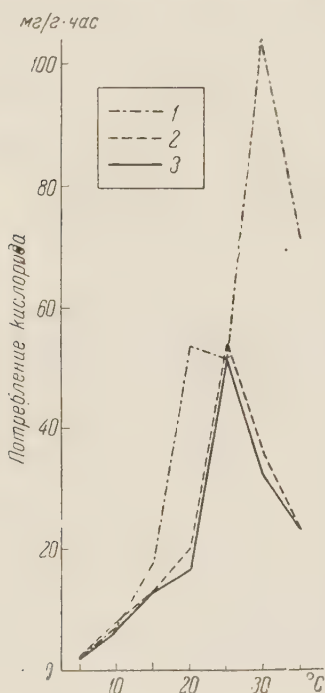


Рис. 1. Влияние температуры на среднесуточное потребление кислорода личинками Pelopiinae: 1 — *A. Monilis*, 2 — *Pr. choreus*, 3 — *Pr. nigriventris*

Таким образом, личинки прокладиев и аблабесмий обитают в разных биотопах. Интересно, что это обстоятельство оказало влияние на уровень газообмена личинок. *Pr. nigriventris* и *Pr. choreus*, обитающие в одном биотопе, по интенсивности дыхания почти не отличаются между собой. Как видно из рис. 1, повышение температуры в обоих случаях приводит к почти одинаковым изменениям дыхания.

При 5° интенсивность газообмена чрезвычайно низкая и в среднем за сутки у личинок прокладиев, как и у аблабесмий, колеблется в пределах от 2,064 до 2,304 мг O_2 на грамм. Далее с повышением температуры повышается и интенсивность газообмена.

Особенно резкий подъем интенсивности газообмена у личинок прокладиев обоих видов обнаруживается при 25°. При этой температуре интенсивность газообмена почти в три раза выше, чем при 20°, и в 20 раз выше, чем при 5°.

По нашим наблюдениям, температура 20° для личинок *Pr. nigriventris* и *Pr. choreus* близка к оптимальной. При опытах, поставленных в аппарате Гертера⁽⁵⁾ для установления температурной избирательности, личинки концентрировались при температурах 18—19°. Отсюда можно заключить, что интенсивность дыхания личинок при 20° должна быть оптимальной. Из этого в свою очередь

следует, что резкое повышение интенсивности дыхания при 25° представляет собой реакцию организма на неблагоприятные условия среды, а именно значительное превышение температурного оптимума. Дальнейшее повышение температуры до 30° приводит к падению интенсивности газообмена, а при 35° личинки прокладиев гибнут в основном через 13—16 час.

У личинок *Ablabesmyia monilis* (рис. 1) интенсивность газообмена при 5 и 10° в общем та же, что и у прокладиев. При дальнейшем повышении температуры газообмен аблабесмий повышается с большей интенсивностью, чем у прокладиев. Температурный оптимум у *A. monilis*, обитающей в естественных условиях в более сильно прогреваемом прибрежье, по нашим наблюдениям, наступает в интервале 20—22°. Температура 25° близка к оптимальной, поэтому резкое повышение интенсивности газообмена у *A. monilis* возникает не при 25°, как у прокладиев, а при 30° (см. рис. 1); при этом среднее потребление ими кислорода за сутки равно 104, 160 мг/г, тогда как у *Pr. nigriventris* максимальное потребление кислорода составляет 51,792 мг/г, а у *Pr. choreus* 54,600 мг/г. При 35° у *A. monilis* происходит резкое падение интенсивности дыхания и смерть.

Не безынтересным представляется нам и тот факт, что интенсивность газообмена, особенно на примере *A. monilis* и *Pr. nigriventris*, лишь в слабой степени изменяется при изменении температур в интервалах, близких к оптимальным температурам. На кривых изменения интенсивности газообмена

получается некоторое уплощение — у прокладиев при 15—20°, а у аблабесмий — при 20—25°.

Подобное явление, а также резкое повышение интенсивности газообмена при температурах, превышающих оптимальные, Э. Я. Граевский⁽³⁾ отмечает для некоторых моллюсков.

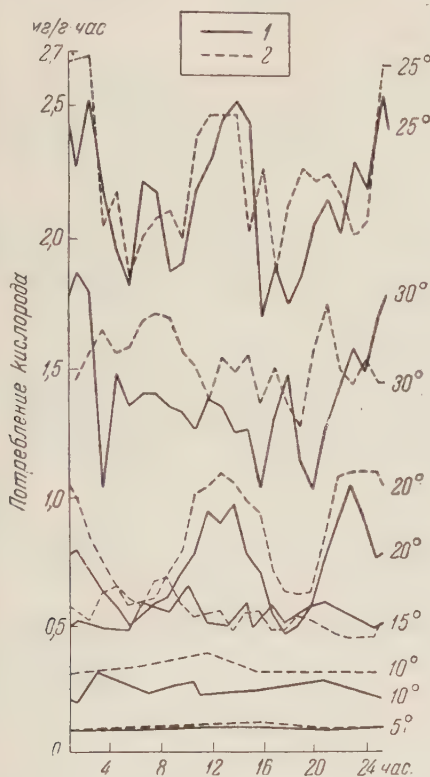


Рис. 2. Влияние температуры на суточный ритм дыхания личинок прокладиев: 1 — *Pr. nigriventris*, 2 — *Pr. choreus*

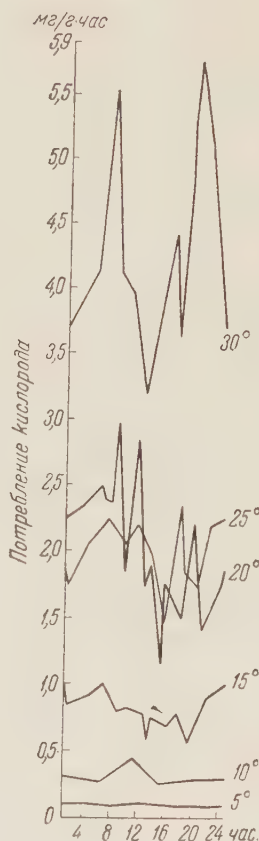


Рис. 3. Влияние температуры на суточный ритм дыхания личинок *Ablabesmyia monilis*

В литературе имеется немало сведений о наличии у многих беспозвоночных суточного ритма дыхания. Мы поставили перед собой задачу — определить влияние термического режима на суточную ритмичность дыхания личинок *Pr. nigriventris*, *Pr. choreus* и *A. monilis* за весь их активный период жизни, начиная от состояния анабиоза при низкой температуре (+5°) и до момента гибели при высокой температуре (35°).

У всех трех видов личинок кривая суточной активности газообмена при 5° представляет собой почти прямую линию (рис. 2 и 3). Иными словами, при низкой температуре дыхание очень ровное и слабое, с постоянной интенсивностью. При +10° наступает как бы пробуждение. На кривых появляются слабые изломы. Наиболее значительные изменения в суточном потреблении кислорода наступают у личинок при 15°. Кривая принимает резко изломанный вид. Газообмен протекает бурно с резко переменной интенсивностью.

При 20° для личинок *Pr. nigriventris* и *Pr. choreus* наступает оптимальная температура. Именно при этих температурах у личинок появляется четкий ритм интенсивности газообмена (рис. 2). В течение суток обнаруживается два максимума: дневной — в период 12—15 час. и ночной — в 22—24 часа.

Для личинок *A. monilis* температура 20° также близка к оптимальной и при ней у аблабесмий появляется ритм дыхания (рис. 3) с максимумами в другие часы: утренним — в 8—13 час. и вечерним — в 20—21 час. Однако кривая дыхания имеет много побочных пиков, которые беспорядочно возникают на фоне общей закономерности. После прохождения оптимальных температур ритм дыхания *A. monilis* при 25° приобретает более четкий, по-прежнему двувершинный характер. У *Pr. nigriventris* и *Pr. choreus* при 25° при сохранении общей закономерности двувершинного ритма на кривой появляются дополнительные пики, свидетельствующие о некотором нарушении четкости ритма газообмена.

В дальнейшем, при 30° у личинок *Pr. choreus* ритм дыхания целиком нарушается. У *Pr. nigriventris* при этой температуре ритм еще не пропадает, но сильно изменяется. Из двувершинного он превращается в одновершинный с ночным максимумом. У *A. monilis* при 30° двувершинный ритм дыхания еще сохраняется.

При 35° у всех трех видов от ритмов дыхания не остается и следа. На 12—13 час. опыта смертность личинок обычно становится наибольшей. Долше 18 час. личинки столь высокой температуры не выдерживают даже при ежечасной смене воды, и все гибнут.

Таким образом, исследования газообмена личинок показали, что ритмы дыхания находятся в прямой зависимости от термических условий и наиболее четко выражены при оптимальных или близких к ним температурах.

В заключение необходимо отметить, что поставленные одновременно опыты по питанию личинок при разных температурах показали, что у личинок *A. monilis* при 20 и 25° возникает суточный ритм питания, идущий параллельно ритму дыхания.

Указанный параллелизм развития ритмов питания и дыхания у водных беспозвоночных уже отмечался Н. С. Гаевской (¹, ²) для черноморских моллюсков *Rissoia splendida* и *Cerithium reticulatum*.

У личинок прокладиев в наших опытах ритмы питания не обнаружены.

Институт биологии водохранилищ
Академии наук СССР

Поступило
28 I 1958

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Н. С. Гаевская, Тр. Инст. океанол., 8 (1954). ² Н. С. Гаевская, Бюлл. МОИ, отд. биол., 61 (5) (1956). ³ Э. Я. Граевский, Журн. общ. биол., 7, № 6 (1946). ⁴ Т. А. Мурагина-Корнеева, Энтомол. обозр., 36, 2 (1957). ⁵ K. Herter, Zs. f. vergl. Physiol., 23, H. 4 (1935).

АНАТОМИЯ РАСТЕНИЙ

Н. П. ДОМАНСКАЯ

ФОРМИРОВАНИЕ КОРНЕВОЙ СИСТЕМЫ ЧЕРЕШЧАТОГО ДУБА

(Представлено академиком В. Н. Сукачевым 3 II 1958)

В настоящей статье делается попытка изложить формирование корневой системы черешчатого дуба (*Quercus robur* L.) от момента прорастания до взрослого дерева.

Работа проводилась в течение вегетационных периодов 1955 и 1956 гг. в условиях искусственных посадок на светло-каштановых почвах в районе Сталинграда (I, II, III опытные участки Московского государственного университета, 7-й участок Зеленого кольца), а также в условиях естественных насаждений (в балках Григорова и Чапурниках, там же). Для сравнения часть материала была собрана под Москвой, в естественных елово-мелколиственных лесах с примесью широколиственных пород, на подзолистых почвах.

При прорастании желудя дуба вначале появляется зародышевый корешок, дающий начало главному корню, и только 1,5—2 недели спустя — себель.

Как показал анатомический анализ, главный корень непосредственно от семядольным узлом обнаруживает стеблевое строение, постепенно переходящее в корневое. Оказалось, что гипокотиль у *Quercus robur* L. выражен достаточно хорошо и имеет в длину несколько сантиметров (так же, как *Quercus suber* L.⁽²⁾, а не 3—4 мм, как указывает Бюсен⁽³⁾). Длина гипокотыля колеблется (от 3—5 до 25 см) и зависит, прежде всего, от места произрастания: наибольшая отмечается в засушливых условиях под Сталинградом. Внешне граница гипокотыля и корня не определяется, и основным анатомическим признаком является положение элементов прото- и метаксилемы. Признак отсутствия сердцевины в корне для определения его границы с гипокотилем неприемлем, так как в условиях большого увлажнения она имеется. По достижении главным корнем 11—18 см длины на нем образуются боковые и придаточные корни II порядка, затем III, IV порядков и т. д., так что к концу первого вегетационного периода можно насчитать 6—7 порядков ветвления.

Известно, что в корневых системах древесных пород существует разделение функций между удлинненными и укороченными корнями, которые получили название скелетных, или ростовых, и сосущих, или питающих.

Разделение корней в корневой системе *Quercus robur* L. только на скелетные и сосущие не представляется возможным, так как существует большая группа корней, занимающих промежуточное положение как по функции, так и по строению. Корни промежуточного строения, с одной стороны, могут осуществлять функцию всасывания, с другой — они выполняют функцию проведения воды и растворенных в ней веществ, так как являются промежуточным звеном между возникающими на них сосущими корешками и главным скелетными корнями, на которых они сами образуются; так же как у скелетных корней, здесь наблюдается вторичный прирост древесины, хотя незначительный, и. т. п.

Наличие этой группы корней еще раз подтверждает правильность вывода

о том, что у лиственных пород, в отличие от хвойных, менее ярко выражены различия между ростовыми и сосущими корнями (1).

На главном корне вначале возникают корни промежуточного строения и сосущие, а затем ростовые, причем возраст, с которого начинается образование последних, весьма различен.

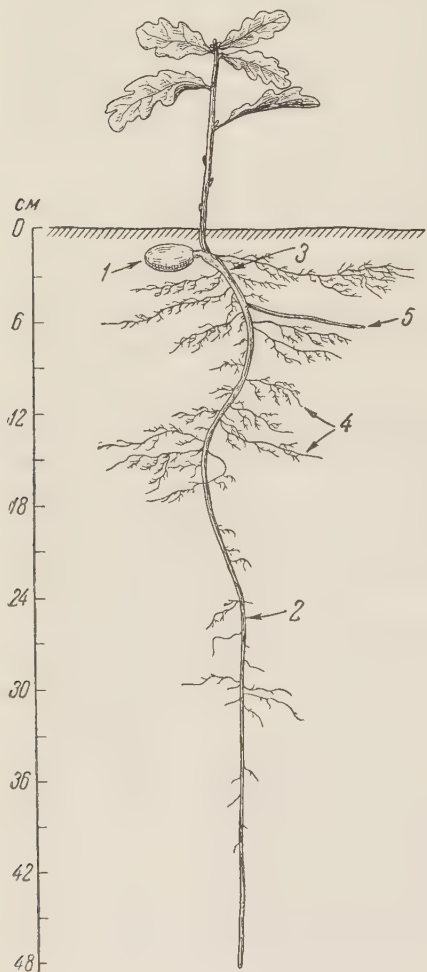


Рис. 1. Корневая система однолетнего дуба в конце 1-го периода ее формирования (Московская обл.). 1 — желудь, 2 — главный корень, 3 — гипокотиль, 4 — сосущие корни и корни промежуточного строения, 5 — появившийся скелетный корень

Так, в посадках под Сталинградом ростовые корни появляются у 2—3-месячных сеянцев, под Москвой в естественных насаждениях этот процесс затягивается от года (подзолистые почвы супесчаного механического состава) до нескольких лет (13—16 лет на заболоченных почвах) и быстрее всего наступает в посадках с удобренной почвой (4 мес.).

В онтогенезе корневой системы *Quercus robur* L. этот ранний период, когда хорошо выражен главный корень с расположенными на нем только сосущими корнями и корнями промежуточного строения, вполне естественно выделяется как 1-й период формирования корневой системы. В это время длина главного корня значительно превышает высоту стволика (рис. 1).

С появлением скелетных корней картина корневой системы дуба резко меняется: начинается интенсивное расширение площади питания, формируется структура будущей корневой системы взрослого дерева. Корневая система вступает во 2-й период своего формирования.

Начиная со второго года жизни, когда полностью израсходованы запасные питательные вещества желудка, нарастание главного корня значительно уменьшается, зато появляющиеся боковые и придаточные гипокотильные скелетные корни начинают бурно расти, ветвятся и сравнительно скоро догоняют и обгоняют по длине главный корень (рис. 2). К этому же времени относится и значительное образование придаточных эпикотильных ростовых

корней, которые со временем вырастают в «лапы» взрослых деревьев. Кстати заметим, что создание подходящих условий для образования этих важных для дуба корней очень желательно (в условиях засушливой степи — посадки в микропонижения по системе Н. А. Качинского, под Москвой — присылка нижней части стволика дуба при рыхлении и т. д.).

Разрастание корневой системы во 2-м периоде формирования является весьма благоприятным, так как в это время начинается быстрый рост надземных органов, в результате чего с 8—12-летнего возраста под Сталинградом несколько позже под Москвой высота дерева превышает длину наибольшего бокового или придаточного скелетного корня.

Питающие корни, образуясь в основном на верхушке скелетных корней и их разветвлений, оказываются все более отодвинутыми от основания стволика

уба. В основании скелетных корней происходит при этом процесс естественного очищения, подобно таковому в кроне: мелкие ответвления высших порядков отмирают, так что остаются крупные корни II и III порядков. Та важная роль, которую играл главный корень в 1-й период, теперь, во 2-м периоде формирования корневой системы, неуклонно уменьшается.



Рис. 2. Корневая система шестилетнего сеянца дуба во 2-м периоде ее формирования. Мощное развитие боковых и придаточных скелетных корней (1, 2,...). Район Сталинграда

большинстве случаев главный корень отмирает еще в первые годы жизни (механические повреждения, плохая аэрация почвы, засоленность, крайняя сухость нижних горизонтов и т. д.). Даже при наличии главного корня в 40—50 лет его роль снижается и постепенно практически полностью переходит к системе придаточных и боковых скелетных корней. Число и протяженность скелетных корней в зависимости от условий весьма различны, в среднем к 50 годам их не менее 10, при длине 2,7—3,5 м (Чапурников-ая балка).

В зрелом возрасте высота кроны всегда выше протяженности корней. Так, у 200—250-летних дубов при высоте их в 20 м максимальная длина корня 16,8—17,5 м, у 250—280-летних при высоте 23 — около 19 м (там же). Такое соотношение остается до начала отмирания дерева (от 40—50 до 100—300 лет).

3-й и последний период формирования корневой системы дуба характеризуется отмиранием скелетных и питающих корней высших порядков, что вызывает явление суховершинности в кроне. Подобно появлению так называемых волчков из спящих почек в кроне, в корневой системе на смену отмирающим корням появляются новые молодые корни 1—4-го порядков. Они все более приближаются к основанию ствола, функционируют недолго (до 4 лет), и с их отмиранием связано отмирание дерева.

Поступило
1 II 1958

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ И. Г. Серебряков, Морфология вегетативных органов высших растений, 1928 г. ² Л. Ф. Правдин, Тр. Бот. инст. АН СССР, Эксп. бот., в. 3 (1938). ³ М. В ü s s e n, Cupuliferae, в кн. G. Kircher, E. Loew, C. Schroeter, Lebensgeschichte der Baumpflanzen Mitteleuropas, 1908.

И. БЕЛИКОВ и Э. КОСТЕЦКИЙ

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОДУКТОВ ФОТОСИНТЕЗА У СОИ В РАННИЕ ФАЗЫ ЕЕ РАЗВИТИЯ

(Представлено академиком А. Л. Курсановым 7 I 1958)

Ранее одним из нас (^{1,2}) было установлено, что у сои до образования бобов продукты фотосинтеза от взрослых листьев поступают молодым растущим листьям, в точки роста побегов, стебли и корни. Это отмечалось в том случае, когда подкармливались $C^{14}O_2$ листья растений среднего яруса. При подкормке же листьев сои нижнего яруса в молодых растущих листьях C^{14} не обнаруживался совсем, или его отмечалось незначительное количество.

Сначала подобное явление нами относилось за счет погрешности проведения опыта, и полученные данные во внимание не принимались. Однако в последующие годы, при повторных опытах, получались аналогичные результаты, т. е. в растущие листья верхнего яруса продукты ассимиляции из листьев нижнего яруса не поступали. Возникло предположение, что возможно, листья разных ярусов имеют свои участки для снабжения ассимилятами, как это имеет место при формировании бобов (³).

Было решено путем постановки специальных опытов проверить данное предположение.

В 1957 г. в Ботаническом саду Дальневосточного филиала Академии наук СССР (19 км от Владивостока) на опытной делянке было посеяно четыре сорта сои — Приморская 529, Уссурийская 154, Сылинуан 4 и Фрэнк не Броуне при площади питания 60×10 см.

Проведены две серии опытов. В I серии растения подкармливались $C^{14}O_2$, когда они имели четыре взрослых листа, а пятый — молодой растущий. Во II серии опытов растения подкармливались, когда у них имелось по семь листьев взрослых, а восьмой — растущий, с малой ассимиляционной поверхностью.

Концентрация углекислоты в аппарате составила: $C^{14}O_2$ 7—10 μCi на литр воздуха, в CO_2 2%; экспозиция 20 мин.

В опытах обеих серий через сутки после подкормки у листьев растений всех ярусов брались пробы — диски диаметром 19 мм, после чего растения гербаризировались, причем предварительно корневая система отделялась от надземной части растения. Позднее из сухих частей растений под прессом делались таблетки диаметром 17 мм, и определялась активность их поверхности на установке типа Б-2. Вес таблетки составлял 0,15—0,2 г.

I серия опытов. Для подкормки радиоактивной углекислотой у всех четырех сортов было выделено по четыре растения. У первого растения подкармливался тройчатый лист первого узла, у второго — второй лист, у третьего — третий, а у четвертого растения лист четвертого узла.

По характеру распределения продуктов фотосинтеза для всех четырех сортов получены близкие данные; поэтому цифровой материал приводится только для двух сортов — стандартного для Приморья и раннеспелого (с табл. 1 и 2).

Из данных табл. 1 видно, что у растений обоих сортов от листьев нижнего яруса к верхним растущим листьям ассимиляты не поступали, в то время как от листьев других ярусов они поступали в большом количестве. В этих

Таблица 1

Активность листовых пластинок растений сои в импульсах
в минуту на диск

Порядко- вый № узла (снизу вверх)	Сорт Приморская 529				Сорт Фрюне Броуне			
	№№ растений							
	1	2	3	4	1	2	3	4
5	1	259	383	142	13	43	858	950
4	1	30	20	5208	0	20	39	2670
3	3	11	2602	5	2	3	4186	1
2	2	1332	0	0	1	3833	4	0
1	3997	5	4	0	2791	1	1	2

опытах, так же как и ранее, мы отмечаем тот факт, что взрослые листья продуктами фотосинтеза не «делятся» друг с другом. Подобное явление отмечено у томатов, периллы и подсолнечника ⁽⁴⁻⁶⁾.

Таблица 2

Активность различных частей растений сои в импульсах в минуту на диск

Часть растения	Сорт Приморская 529				Сорт Фрюне Броуне			
	№№ растений							
	1	2	3	4	1	2	3	4
Стебель выше кормлен-ного листа	98	305	1174	829	83	91	883	3033
Стебель ниже кормлен-ного листа	304	448	588	456	447	481	1104	1120
Главный корень	45	218	351	125	155	154	430	28
Боковые корешки	39	143	368	55	44	90	25	6
Всего имп/мин	486	1114	2471	1465	729	806	2512	4187

Данные о наличии радиоактивного углерода в других частях растений представлены в табл. 2; из них видно, что продуктивность листьев по ярусам не одинакова. Листья нижнего яруса в несколько раз менее продуктивны, чем листья верхних ярусов. Это объясняется, с одной стороны, меньшей листовой площадью листа 1-го и 2-го яруса, а с другой — их относительной старостью. Далее мы видим, что при подкормке листьев нижнего яруса больше ассимилятов направляется в нижнюю часть растения, а при подкормке листьев верхних ярусов — их больше направляется в верхнюю часть растения. Например, у сорта Приморская 529 при подкормке листа 1-го яруса 76% ассимилятов направляются вниз, и только 24% — вверх; у сорта Фрюне Броуне соответственно 82 и 18%. При подкормке же листа 4-го яруса количество ассимилятов, направляющихся вниз, у сорта Приморская 529 равно 25%, а у Фрюне Броуне 29%; вверх же соответственно 65 и 71%.

Сравнительно небольшое поступление радиоактивного углерода от листа 1-го яруса в боковые корешки объясняется наличием ветвей в его пазухе и в пазухе парных листьев, где нами отмечена большая радиоактивность в листовых пластинках растущих листьев. Во 2-м и 3-м узлах в это время ветвей еще не было.

II серия опытов. Растения этой серии опытов к моменту проведения подкормки $C^{14}O_2$ находились в фазе цветения. Для наших целей у каждого сорта выделялось по семь растений, у которых подкармливались листья разных ярусов. К этому времени у каждого растения имелось по семь взрослых и одному растущему листу и по пять-шесть боковых побегов.

Таблица 3

Активность листовых пластинок главного стебля растений сои в импульсах в минуту на диск

Поряд- ковый № узла (снизу вверх)	Сорт Приморская 529							Сорт Фрюне Броуне						
	№№ растений													
	1	2	3	4	5	6	7	1	2	3	4	5	6	7
8	0	1	6	—	131	515	50	13	11	26	24	39	250	327
7	1	0	12	11	22	13	185	19	4	14	6	13	16	502
6	0	0	11	4	15	587	1	8	4	18	4	6	482	3
5	2	0	1	0	887	4	2	9	5	11	6	372	13	10
4	0	1	9	463	4	1	0	16	2	6	514	3	10	3
3	0	1	338	0	5	9	0	5	0	617	0	1	12	3
2	1	1448	0	0	1	13	4	6	167	0	2	2	9	6
1	270	0	0	0	8	2	0	347	1	2	2	11	13	2

Соответствующие данные об активности листовых пластинок представлены в табл. 3; из них видно, что в этом опыте, как и в опыте I серии, ассимиляты от листьев нижнего яруса к верхним растущим листьям не поступали; последние снабжались продуктами фотосинтеза от листьев верхнего яруса. Наряду с этим мы произвели определение радиоактивности листовых пластинок в молодых растущих листьях боковых побегов. Оказалось, что от листьев 1-го, 2-го и 7-го ярусов продукты фотосинтеза не поступали к боковым побегам. Последние обильно снабжались от листьев 3-го — 6-го ярусов.

Характерно, что продуктами фотосинтеза снабжались преимущественно ветви, которые расположены в пазухе самого листа, и ветви, расположенные ближе к подкармливаемому листу. Продукты фотосинтеза от листьев 5-го и 6-го ярусов, в пазухе которых не было ветвей, поступали преимущественно к ветвям, расположенным в пазухе листьев 3-го и 4-го ярусов. Ветви парных листьев и 1-го узла, как имеющие по четыре-пять взрослых листьев, обходились без «помощи».

Данные о распределении радиоактивного углерода в других частях растений в этот период роста и развития представлены в табл. 4.

Данные табл. 4 показывают, что в фазе начала цветения мы отмечали те же закономерности в распределении продуктов фотосинтеза в растениях, что и при ранних фазах их развития. От листьев нижнего яруса больше ассимилятов поступало в нижнюю часть растения, в корни, а от листьев верхнего яруса — в верхнюю часть растения. Необходимо отметить, что листья 1-го яруса к этому времени имели довольно малую продуктивность, так как в данной фазе развития листья нижнего яруса обычно желтеют и отмирают. Наибольшей продуктивностью в это время обладали листья среднего и верхнего ярусов.

Приведенные данные позволяют прийти к следующему заключению.

У растений сои наблюдается тенденция к локальному распределению продуктов фотосинтеза не только в период образования бобов (³), но и в ранние фазы развития растения. До начала плодообразования ассимиляты поступают преимущественно от листьев нижнего яруса в нижнюю часть растения — корни и ветви, расположенные в пазухе парных листьев и пазухе первого тройчатого листа; от листьев верхнего яруса они поступают главным образом к молодым растущим листьям и точку роста верхней части

Таблица 4

Радиоактивность различных частей растений сои в импульсах в минуты на диск

Часть растения	№№ растений						
	1	2	3	4	5	6	7
Сорт Приморская 529							
Главный стебель выше кормленного листа	9	6	10	20	55	233	—
Главный стебель ниже кормленного листа	26	74	114	124	119	197	—
Главный корень	9	470	327	51	78	30	—
Боковые корешки	71	31	37	49	77	6	—
Всего	115	581	488	244	329	466	
Сорт Фрюне Броуне							
Главный стебель выше кормленного листа	0	7	24	68	47	96	337
Главный стебель ниже кормленного листа	19	31	77	200	185	107	71
Главный корень	13	29	20	100	71	51	5
Боковые корешки	8	13	7	53	37	19	8
Всего	40	80	127	421	340	273	411

стебля, а от листьев среднего яруса продукты фотосинтеза направляются и в нижнюю, и в верхнюю части растения. Следовательно, продукты фотосинтеза от места их образования направляются главным образом в ближайшее место их потребления.

Дальневосточный филиал им. В. Л. Комарова
Академии наук СССР

Поступило
7 XII 1957

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ И. Ф. Беликов, Физиол. раст., 2, в. 4 (1955). ² И. Ф. Беликов, Тез. докл. Всесоюз. конфер. по применению радиоактивных изотопов, 1957. ³ И. Ф. Беликов, ДАН, 102, № 4 (1955). ⁴ А. И. Литвиненко, Агробриология, № 3 (1957). ⁵ А. А. Прокофьев, Л. П. Жданов, А. М. Соболев, Физиол. раст., 4, в. 5 (1957). ⁶ М. К. Чайлахян, Р. Г. Бутенко, Физиол. раст., 4, в. 5 (1957).

В. И. СЛОВИКОВСКИЙ

К ВОПРОСУ О РАЗЛОЖЕНИИ И ВЫЩЕЛАЧИВАНИИ ЛИСТЬЕВ ДРЕВЕСНЫХ РАСТЕНИЙ

(Представлено академиком В. Н. Сукачевым 3 II 1958)

Вмывание в почву органического вещества из разлагающихся листьев имеет большое значение в повышении плодородия почв. Почвы, содержащие органическое вещество, обладают высокой поглощательной способностью. Эта способность проявляется при наличии коллоидных веществ, которые связывают растворимые минеральные соли и предохраняют их от вымывания в грунтовые воды. Органическое вещество изменяет физические свойства почвы и ее структуру. Образующиеся при разложении органических остатков углекислота и другие органические кислоты переводят трудно растворимые в воде минеральные соединения из малоподвижных форм в подвижные.

Количество вымываемых из листьев разных древесных и кустарниковых пород органических веществ и зольных элементов весьма различно. Оно зависит не только от биологических свойств отдельных древесных пород, но и от ряда почвенно-климатических условий.

Мощный слой медленно разлагающейся лесной подстилки почти полностью задерживает незначительные летние атмосферные осадки. Такое поглощение влаги (осадков) препятствует быстрому вымыванию из подстилки и вмыванию в почву как органических растворимых веществ, так и минеральных солей, играющих важную роль в питании растений.

Вымывание из листьев растворимых веществ зависит не только от количества прошедших через опад осадков, но и от степени разложения самого опада.

Наши исследования по минерализации органического опада были проведены в Институте лесоводства АН УССР на специально заложённой лизиметрической площадке по методу Н. Н. Степанова (¹). Результат опыта по определению кислотных свойств и содержания зольного состава опада уже опубликован (^{2, 3}). В настоящей работе мы приводим данные по выщелачиванию из листьев древесных и кустарниковых пород растворимых веществ в зимний период и в целом за год. Кроме того, приведены данные лабораторного опыта, в котором определено наличие абсолютных потерь при разложении листьев некоторых пород. Из полученных данных видно, что листья большинства кустарников (европейского бересклета, черной бузины, желтой акации и др.), а также некоторых древесных пород (сибирской лиственницы, обыкновенного ясеня, береста, белой акации, бархата амурского, липы) разлагаются сравнительно быстро. На протяжении 10,5 мес. в процессе разложения, при 436 мм осадков, вымывается (определено по разности веса листьев до и после разложения) атмосферными водами, без учета абсолютных потерь, 50—60% растворимых веществ (табл. 1). Меньше всего за этот срок вымывается растворимых веществ из листьев бука (7,3%), красного дуба (20,5%), черешчатого дуба и хвои сосны (36,5%). Как видно, процесс разложения листьев этих пород протекает медленнее по сравнению с породами, указанными выше. Поэтому под лесным пологом этих пород

(хвоя сосны, листья всех видов дуба и бука) почва покрыта мощным слоем накопившейся подстилки. Это обстоятельство имеет важное значение в интенсивности процесса кругооборота питательных веществ и влагооборота почвы под указанными породами.

Вымывание органических веществ и зольных элементов из листьев также имеет место и в осенне-зимне-весенний период. Это исследование проведено в опыте, заложенном в 1948 г.

Таблица 1

Выщелачивание из листьев и хвои древесных пород растворимых веществ (в процентах)

За 10,5 мес. 1949—1950 гг. при 436 мм осадков (опыт в лизиметрах)		За осенне-зимне-весенний период 1948—1949 гг. при 113 мм осадков	
Бересклет европейский	66,4	Бузина черная	10,6
Бузина черная	64,4	Бересклет бородавчатый	6,7
Акация желтая	62,6	Граб	6,3
Бересклет бородавчатый	59,9	Клен серебристый	6,0
Берест	59,4	Акация желтая	5,8
Лиственница	55,6	Берест	5,1
Ясень обыкновенный	55,0	Ясень обыкновенный	4,7
Бархат амурский	51,8	Ольха черная	4,7
Ива белая	50,9	Бересклет европейский	4,5
Липа	49,6	Ясень зеленый	4,3
Клен серебристый	49,5	Ива белая	4,3
Акация белая	49,2	Орех грецкий	3,5
Орех грецкий	46,2	Акация белая	3,3
Клен полевой	45,9	Клен остролистный	2,9
Береза	45,6	Скумпия	2,7
Граб	44,2	Бархат амурский	2,6
Осокорь	42,7	Гледичия	2,6
Клен остролистный	42,5	Клен полевой	2,3
Скумпия	42,3	Осина	2,3
Лещина	40,8	Липа	2,1
Ольха черная	40,2	Лиственница	1,7
Ясень зеленый	38,7	Береза	1,7
Сосна обыкновенная	36,5	Лещина	1,5
Дуб черешчатый (поздняя форма)	36,4	Дуб черешчатый (ранняя форма)	1,3
Дуб черешчатый (ранняя форма)	36,2	Берека	1,0
Берека	35,9	Сосна обыкновенная	0,8
Осина	32,9	Дуб красный	0,8
Гледичия	31,2	Бук	0,8
Дуб красный	20,5	Дуб черешчатый (поздняя форма)	0,7
Бук	7,3		
Смеси		Смеси	3,0
Дуб черешчатый (поздняя форма) + лиственница	42,1	Ясень + лиственница	2,7
Дуб черешчатый + ясень обыкновенный	45,2	Дуб (поздняя) + ясень	1,1
Ясень обыкновенный + лиственница сибирская	56,0	Дуб (поздняя) + лиственница	2,1
Дуб черешчатый + ясень обыкновенный + лиственница сибирская	48,7	Дуб (поздняя) + ясень + лиственница	

По данным табл. 1 (за период с ноября по март и при 113 мм осадков), из разлагающихся листьев черной бузины, бородавчатого бересклета, граба, серебристого клена, желтой акации и береста выщелочилось (определено в фильтрах) сухих растворимых веществ от 5 до 11%. Незначительное

(от 0,8 до 1,0%) выщелачивание сухих веществ наблюдалось в листьях обыкновенной сосны, красного дуба, бука, березки и черешчатого дуба. Таким образом, листья кустарниковых пород и некоторой части древесных более интенсивно разлагаются не только в период теплого времени, но и на холоде, а поэтому количество вымываемых из них растворимых веществ всегда больше по сравнению с остальными породами.

Что касается смесей листьев пород, то скорость их разложения и количество вымываемых органических и зольных веществ занимает среднее место. Прибавление к листьям черешчатого дуба опада лиственницы или ясеня повышает скорость разложения. Поэтому слой подстилки под пологом леса из трудно разлагающихся пород в смешанных насаждениях всегда меньше, чем в чистых насаждениях.

Наряду с опытом лизиметрическим, в котором проходило разложение и выщелачивание листьев в естественных условиях, был поставлен и лабораторный опыт с листьями наиболее характерных по выщелачиванию пород. При этом мы наблюдали достаточно интенсивное разложение листьев черной бузины, которые уже на 5 день потеряли четкость своих очертаний. На 15 день из них образовалась сплошная монолитная масса, а на 29 день они были сплошь покрыты грибным мицелием разных видов, и остатки издавали резкий неприятный запах разлагающихся белков. Вода плохо просачивалась сквозь опад, и фильтраты через 30 дней от начала опыта изменили окраску от темно- до светло-коричневой. Менее интенсивное разложение наблюдалось в опаде европейского бересклета. В конце опыта на остатках листьев, которые представляли собой также бесформенную массу, колониями появились грибы, но масса листьев еще была достаточно пористой, и вода при увлажнении просачивалась сквозь них. Фильтраты были окрашены в светло-коричневый цвет.

Таблица 2

Выщелачивание из листьев древесных пород растворимых в лабораторном опыте (в граммах на 100 г абсолютно сухих листьев)

Порода	В фильтратах			В остатках листьев после вымывания	Всего в остатках листьев и фильтратах	Абсолютные потери
	с 1-го по 16 день опыта	с 17-го по 40 день опыта	за время опыта			
Дуб черешчатый	3,18	4,47	7,65	65,70	73,35	26,65
Дуб красный	2,61	2,27	4,88	85,58	90,46	9,54
Бук	1,96	2,23	4,19	85,71	89,90	10,10
Граб	10,55	11,33	1,88	57,78	79,66	20,34
Бересклет европейский	8,14	5,65	13,79	43,02	56,81	43,19
Бузина черная	13,82	4,92	18,74	44,76	63,49	36,51

Наименьшая интенсивность разложения спада наблюдалась у остальных четырех пород (табл. 2), особенно у бука и красного дуба. До конца опыта листья сохранили свою форму; у граба и черешчатого дуба листья покрылись плесенью. Фильтраты приобрели в конце опыта более интенсивную окраску: их цвет изменился от светло- до темно-коричневого. Приведенные данные показывают, что скорость выщелачивания сухих веществ из листьев не одинакова для всех пород, как это наблюдалось и в предыдущих опытах. У бузины и бересклета она очень велика в начале и резко уменьшается в конце опыта, на 40 день. У остальных пород питательные вещества вымываются почти равномерно на протяжении всего времени исследования.

При выщелачивании из листьев растворимых веществ наблюдаются абсолютные потери, которые у кустарников почти вдвое выше, чем у черешчатого дуба и граба, и в три-четыре раза выше, чем у бука и красного дуба. Эти потери можно отнести за счет образования летучих продуктов разложения — воды, уголекислоты, аммиака и др.

Медленное разложение подстилки неблагоприятно сказывается на гидрологическом режиме и на кругообороте питательных веществ в почве под пологом леса. Поэтому в целях повышения интенсивности минерализации опада и улучшения влагоснабжения почвы необходимо применять во многих случаях дополнительные лесохозяйственные и агротехнические мероприятия.

При создании культур целесообразно практиковать смешение пород, опад которых разлагается с разной скоростью, но при этом следует учитывать лесорастительные условия. Одновременно следует заселять лесные культуры определенными группами мезофауны (¹), которая значительно ускоряет процессы минерализации подстилки и разрыхляет почву.

Возможно также, что благоприятно на жизни леса скажется внесение небольших доз селитры в целях подкормки микроорганизмов и самих древесных растений.

Отделение химических и геологических наук
Академии наук УССР

Поступило
2 II 1957

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ Н. Н. Степанов, В защиту леса, 2, 7 (1937); На лесокультурном фронте, 5—6 (1932). ² П. С. Погребняк, А. И. Зражевський, В. І. Словіковський, Прац. Інст. лісівн. АН УРСР, 3, 104 (1952). ³ В. І. Словіковський, Допов. АН УРСР, № 3, 293 (1957). ⁴ А. И. Зражевский, Сборн. Массивное лесоразведение и выращивание посадочного материала, Изд. АН УССР, 1952; Прац. Інст. лісівн. АН УРСР, 3 (1952); Совещ. по лесн. почвовед. при Инст. леса АН УССР, Киев, 1956.

Н. Д. ТИМАШОВ

ВЛИЯНИЕ МИКРОЭЛЕМЕНТОВ МЕДИ И КОБАЛЬТА НА СОДЕРЖАНИЕ НУКЛЕИНОВЫХ КИСЛОТ В ЛИСТЬЯХ КАРТОФЕЛЯ

(Представлено академиком А. Л. Курсановым 20 XII 1957)

В настоящее время имеется обширная литература, касающаяся влияния микроэлементов на те или другие стороны жизнедеятельности растений. Установлено (1-3), что недостаток меди в растениях, произрастающих на почвах, бедных медью, приводит к снижению урожая и устойчивости к различным заболеваниям вследствие нарушения ряда физиологических процессов в организме.

Показано (4-6) также благотворное влияние микроэлемента кобальта, вносимого как корневым, так и некорневым путем, на величину и качество урожая растений. Несмотря на довольно подробное изучение влияния микроэлементов на растения, их роль в физиологических и биохимических процессах организмов раскрыта далеко еще не достаточно.

Нами изучалось действие микроэлементов на содержание нуклеиновых кислот, восстановленного глутатиона и активность каталазы в листьях картофеля сорта Стахановский. Опытные растения выращивались на участке Украинского научно-исследовательского института растениеводства, селекции и генетики (г. Харьков). В качестве микроудобрений на фоне предпосадочного внесения NPK использовались 0,001 M раствор CuSO_4 и 0,0001 M раствор CoSO_4 , которыми пятикратно опрыскивались растения в течение вегетации из расчета 40 мл на одно растение. Контрольные растения опрыскивались дистиллированной водой.

Кроме того, мы изучали изменения в содержании нуклеиновых кислот в листьях картофеля, отделенных от растения, в которые вводились те же дозы микроэлементов методом «плавающих листьев» (по Палладину). По-

Таблица 1

Влияние некорневой обработки картофеля кобальтом и медью на содержание нуклеиновых кислот в листьях (по фосфору — в мг P_2O_5 на 1 г сух. вещества)

	Обработка кобальтом				Обработка медью			
	общее содерж.	РНК	ДНК	ДНК в % к общ. содерж. Р нукл. кисл.	общее содерж.	РНК	ДНК	ДНК в % к общ. содерж. Р нукл. кисл.
Опыт	3,83	3,22	0,61	15,9	2,83	2,34	0,49	17,4
Контроль	3,10	3,03	0,07	2,3	2,70	2,30	0,40	14,8
Опыт	4,20	3,10	1,10	26,2	3,10	2,40	0,70	22,6
Контроль	3,76	3,30	0,46	12,3	3,00	2,36	0,64	21,3
Опыт	2,69	1,93	0,76	28,3	2,63	2,20	0,43	16,3
Контроль	2,48	1,86	0,62	25,0	2,50	1,15	0,35	14,0
Опыт	1,56	1,45	0,11	7,1	2,73	2,01	0,72	26,8
Контроль	1,30	1,26	0,04	3,1	2,66	2,19	0,47	17,7

сле напительвания растворами микроэлементов в течение 20 мин. листья обмывались бидистиллятом с поверхности подсушивались и 3 дня выдерживались во влажной камере на растворе Кнопа.

Выделение нуклеиновых кислот из сухого вещества листьев производилось по видоизмененному методу Шмидта и Тангаузера (7). Определение фосфора нуклеиновых кислот производилось по Фиске — Суббароу. SH-глутатион в листьях определялся по видоизмененному методу Вудворда и Фри (8), каталаза — по Баху и Опарину. На протяжении всего периода

Таблица 2

Влияние кобальта на изменение в содержании нуклеиновых кислот в листьях картофеля, отделенных от растения (по фосфору — в мг P_2O_5 на 1 г сух. вещества)

	Общее содерж.	РНК	ДНК	ДНК в % к общему со- держ. Р нукл. кисл.
Исходное содержание	3,64	2,71	0,93	25,4
Напительвание $H_2O + Co$	2,71	1,81	0,90	35,8
Напительвание H_2O (контроль)	2,66	2,28	0,38	14,3
Исходное содержание	2,30	1,44	0,88	38,2
Напительвание $H_2O + Co$	1,96	1,18	0,78	39,6
Напительвание H_2O (контроль)	1,92	1,69	0,23	11,9
Напительвание $H_2O + Co$	1,56	1,10	0,46	29,4
Напительвание H_2O (контроль)	1,30	1,05	0,25	19,4

вегетации анализировались молодые листья — второй лист от верхушки. Средняя проба составлялась из 25—30 растений.

Из данных табл. 1 видно, что под влиянием кобальта в листьях картофеля по сравнению с контролем возрастает общее содержание фосфора нуклеиновых кислот, а также увеличивается содержание фосфора ДНК.

Действие меди на содержание нуклеиновых кислот в листьях картофеля сходно с действием кобальта.

В табл. 2 представлены данные, показывающие влияние напительвания отделенных от растения листьев раствором кобальта с последующим выдерживанием в течение трех дней во влажной камере на изменение содержания нуклеиновых кислот. Определялось также содержание нуклеиновых кислот в листьях сразу же после их отделения от растения (исходное содержание).

По данным табл. 2 видно, что в листьях картофеля, отделенных от растения и выдерживаемых во влажной камере три дня, уменьшается общее количество нуклеиновых кислот вследствие их распада. Кобальт же несколько задерживает распад нуклеиновых кислот и способствует более высокому содержанию ДНК.

Данные табл. 3 показывают, что подкормка растений 0,0001 М раствором $CoSO_4$ оказывает положительное действие на содержание SH-глутатиона

Таблица 3

Влияние некорневой обработки картофеля кобальтом и медью на содержание SH-глутатиона (в мг на 1 г сыр. вещества) и активность каталазы (в мл 0,1 N $KMnO_4$ на 1 г сух. вещества) в листьях (фаза клубнеобразования)

	Обработка кобаль- том		Обработка медью	
	содержа- ние SH- глутатио- на	актив- ность ката- лазы	содержа- ние SH- глутатио- на	активность каталазы
Опыт	0,4277	148	0,2735	110,2
Контроль	0,4115	119	0,2416	129,0
Опыт	0,4761	261	0,4115	105,3
Контроль	0,4519	218	0,0807	184,3
Опыт	0,1775	169	0,3712	133,5
Контроль	0,1049	157	0,3389	98,4
Опыт	0,2035	213	0,4519	98,5
Контроль	0,1940	185	0,1210	119,8

и на активность каталазы в листьях, тогда как 0,001 М раствор CuSO_4 является оптимальным для активирования глутатиона и угнетающим в отношении каталазы.

Суммируя данные наших опытов, можно сделать общее заключение, что некорневая обработка картофеля кобальтом и медью оказывает положительное действие на содержание нуклеиновых кислот в листьях. Это указывает на то, что подкормка картофеля CoSO_4 и CuSO_4 активирует синтетические процессы, протекающие в растении, в результате чего и происходит увеличение урожая растений. В наших опытах обработка растений картофеля кобальтом дала повышение урожая клубней на 15% в расчете на один куст, а обработка медью — на 10%.

Научно-исследовательский институт биологии
Харьковского государственного университета
им. А. М. Горького

Поступило
26 I 1957

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ Н. С. Архангельская, Сборн. Микроэлементы в жизни растений и животных, Изд. АН СССР, 1952. ² А. С. Оканенко, там же. ³ М. М. Окунцов, там же. ⁴ О. К. Добролюбский, ДАН, 106, № 4 (1956). ⁵ П. Н. Коршаков, Сборн. За высокий урожай зерновых культур, Воронеж, 1955. ⁶ О. К. Кедров-Зихман, Сборн. Применение изотопов в технике, биологии и сельском хозяйстве, Изд. АН СССР, 1955. ⁷ А. Н. Белозерский, Н. И. Проскуряков. Практическое руководство по биохимии растений, М., 1951. ⁸ Б. П. Строганов, Сборн. научн. работ комсомольцев-биологов, Изд. АН СССР, 1940.

Н. В. БОНДАРЕНКО и КУАН ХАЙ-ЮАНЬ

ОСОБЕННОСТИ ВОЗНИКНОВЕНИЯ ДИАПАУЗЫ У РАЗЛИЧНЫХ ГЕОГРАФИЧЕСКИХ ПОПУЛЯЦИЙ ПАУТИННОГО КЛЕЩА

(Представлено академиком Е. Н. Павловским 3 II 1958)

Одной из характерных особенностей годового цикла обыкновенного паутинного клещика (*Tetranychus urticae* Koch) в умеренных и северных широтах является осенняя диапауза. В отличие от зеленовато-серых самок летних поколений диапаузирующие самки приобретают оранжево-красную окраску тела и характеризуются рядом физиологических особенностей, адаптированных к переживанию вида в период суровых условий зимовки. При этом диапаузирующие самки обычно появляются задолго до наступления неблагоприятных условий. Известно, что в условиях Ленинградской обл. решающую роль в появлении зимующих самок играет укороченный световой день⁽³⁾; некоторое влияние на диапаузу может оказывать также температура, а иногда и качество пищи⁽⁴⁾.

Значение причин, вызывающих появление и окончание диапаузы, а также особенностей ее протекания в тех или иных географических широтах имеет не только теоретическое, но и практическое значение, в частности при составлении прогнозов размножения клеща, при планировании мероприятий по защите растений и т. д. Между тем, в условиях хлопковых районов, где указанный вредитель имеет особенно большое экономическое значение, этому вопросу до сих пор не уделяется достаточного внимания, а некоторые авторы вообще отрицают наличие какой-либо связи между длиной дня и появлением диапаузирующих самок⁽⁸⁾. Поэтому мы поставили задачу проследить влияние укороченного дня и температуры на появление диапаузы у самок паутинного клеща в различных географических широтах. Настоящее исследование выполнено на кафедре общей энтомологии Ленинградского сельскохозяйственного института, и авторы признательны заведующему кафедрой чл.-корр. АН СССР Г. Я. Бей-Биенко за интерес и содействие в работе. Экспериментальная ее часть выполнена Куан Хай-юанем под руководством Н. В. Бондаренко.

Материал для исследований был собран из теплиц г. Пушкина (59°44' с. ш., Ленинградская обл.), станицы Крымской (44°53' с. ш., Краснодарский край), а также получен из Тбилиси (41°43' с. ш.) от Г. Ф. Рекка и из Ташкента (41°20' с. ш.) от Ф. М. Успенского. В связи с незначительной разницей в широте местности между г. Пушкиным и г. Ленинградом (0°12'), а также ст. Крымской и г. Краснодаром (0°10') мы в дальнейшем будем условно называть эти популяции ленинградской и краснодарской. Полученный материал размножался в теплице на хлопчатнике сорта ОД-1, который в последующем служил пищей для клещей.

На каждое растение в возрасте 4—5 листьев отсаживалось по 50 самок клеща соответствующей популяции. Через сутки они удалялись, и отложенные яйца служили исходным материалом опыта. Как только из яиц вылуплялись личинки, растения помещались в термостатные камеры с соответствующим фотопериодом. Температура в камерах регулировалась автоматически (с колебаниями $\pm 0,3^\circ$). Освещение камер (3—4 люминес-

центные лампы типа БС-20) включалось в соответствии с вариантами опыта. Все варианты ставились в трех повторностях. Общее число самок в каждом варианте составляло в среднем 200 особей (не ниже 68).

Для проверки принадлежности полученного материала к одному и тому же виду производилось скрещивание самцов из одной географической популяции с самками другой популяции и наоборот. В результате во всех случаях были получены не только самцы, но и самки, нормально откладывавшие яйца.

Таблица 1

Появление диапаузирующих самок (в процентах) у различных географических популяций паутинного клеща в условиях укороченного дня постоянной температуры (20°)

Наименование популяции	Число часов света в сутки										
	0	9	10	11	12	13	14	15	16	17	24
Ленинградская	40,2						100	100	100	95,3	0
Краснодарская	2,8			100	84,7	2,2	0				0
Тбилисская	1,0		90,1	85,4	21,5	0	0	0			0
Ташкентская	1,9	91,3	85,1	82,6	44,6	0					0

В I серии опытов клещи различных географических популяций подвергались воздействию дня различной продолжительности в условиях постоянной температуры (20°). При этом оказалось (табл. 1), что под влиянием соответствующего фотопериода у всех популяций удалось получить диапаузирующих самок. Однако, как и следовало ожидать, критическая длина дня, при которой происходит резкое изменение в сторону бездиапаузного развития самок, достаточно четко различается в зависимости от широты местности, где обитала данная популяция. Так, опыты подтвердили, что критический фотопериод для ленинградской популяции приближается к 17 час. (3): у краснодарской он лежит примерно между 11 и 12 час. Следовательно, при изменении широты местности с севера на юг на 15° (Ленинград — Краснодар) критический фотопериод у соответствующих популяций клеща при температуре 20° уменьшается примерно на 5 час. С дальнейшим

Таблица 2

Влияние температуры на появление диапаузирующих самок клеща в условиях укороченного дня для данной популяции (в процентах)

Наименование популяции	Число часов света в сутки	Температура среды, °С				
		16	20	25	30	35
Ленинградская	16	100	100	2,8	1,4	0
Краснодарская	12	100	84,7	0	0	0
Тбилисская	10	100	90,1	0	0	—
Ташкентская	10	100	85,1	0	0	—

продвижением к югу (Тбилиси, Ташкент) он уменьшается еще на 1 час.

Весьма характерно, что у более южных популяций клеща не удалось получить 100% диапаузирующих самок при этой температуре. Это указывает на более факультативный характер диапаузы у южных популяций и вполне согласуется с наблюдениями многих авторов о том, что в теплую зиму некоторая часть самок может размножаться^(7, 8, 10).

Интересны результаты, полученные в крайних вариантах опытов: в условиях непрерывного круглосуточного освещения клещи всех популяций развивались совершенно без диапаузы; в несколько более ослабленной степени эта тенденция проявляется и в полной темноте, причем она усиливается в направлении с севера на юг.

Во II серии опытов мы проследили влияние температуры на появление диапаузы в условиях критического фотопериода для данной популяции. Полученные материалы (табл. 2) свидетельствуют о том, что даже при не очень высоких температурах (25°) заметно сдвигаются пороговые точки критического фотопериода и клещи развиваются без диапаузы. И в этом случае

у самок ленинградской популяции характер диапаузы устойчивее, чем у клещей из более южных широт. Интересно отметить, что повышенные температуры ($30-35^{\circ}$), применявшиеся нами в отдельных вариантах опыта, не оказывали на организм какого-либо патологического влияния в отличие от того, что отмечалось для некоторых насекомых⁽⁵⁾. Это явление имеет, несомненно, приспособительный характер; в природных условиях в районах с достаточно высокой температурой в весенний и осенний периоды клещи могут размножаться и при более укороченном дне.

Зная общие закономерности появления диапаузы у паутиного клеща нетрудно предсказать массовое появление красных самок, а следовательно, и снижение численности вредителя для изучаемых нами популяций. Так, в условиях Ташкента, при среднесуточной температуре 20° , появления заметного числа (44%) красных зимующих самок (табл. 1, 2) следует ожидать в конце сентября — начале октября (соответственно продолжительности дня 12 час. 28 мин. и 11 час. 48 мин.); полный переход к диапаузе в этом районе произойдет во II—III декаду ноября (продолжительность дня 10 час. 4 мин. и 9 час. 44 мин., соответственно) при условии, если среднесуточная температура не будет превышать 15° . При более высокой температуре этого периода количество диапаузирующих самок может уменьшиться, а при понижении — переход к диапаузе наступит раньше. Следует также отметить, что красные самки появятся лишь в том случае, если воздействию соответствующего сочетания короткого дня и температуры подвергались личинки и нимфы клеща, а не взрослые самки⁽³⁾. Эти предсказанные на основании наших лабораторных опытов данные вполне согласуются с конкретными наблюдениями М. И. Кособуцкого, опубликованными Г. Г. Курбановым⁽⁸⁾.

В наших опытах использовались круглосуточные постоянные температуры, не равнозначные среднесуточным. Поэтому для составления более точных прогнозов следует дополнительно выяснить влияние пониженных температур ночного периода, которые, как показывают наблюдения⁽²⁾, могут заметно сказаться на увеличении процента диапаузирующих самок. Разработка этого вопроса включена нами в программу дальнейших исследований. Кроме указанных особенностей фотопериодической реакции, географические популяции клеща проявили весьма четкие различия в скорости развития (рис. 1). Весьма характерно, что эти различия тем больше, чем ниже была температура в опыте. Так, при 15° продолжительность развития ленинградской популяции (от личинки до взрослого клеща) оказалась на 5 суток короче, чем у тбилисской, при 20° на 4 и при 25° на 2 суток. При 30° различий в скорости развития уловить не удалось. Краснодарская популяция занимала промежуточное положение.

Результаты проведенных исследований показывают, что вопреки утверждению некоторых авторов⁽⁶⁾ диапауза у паутиного клеща наступает под влиянием укороченного дня как в северных (Ленинград), так и в более южных областях его ареала (Краснодар, Ташкент, Тбилиси). Весьма сходна также с уже отмеченной для Ленинграда⁽²⁾ взаимосвязь между фотопериодом и температурой: повышенные температуры во всех указанных ареалах заметно ослабляют влияние короткого дня и предотвращают появление диапаузы. Однако, несмотря на общие закономерности в появлении диапаузы, конкретные показатели этих реакций неодинаковы и специфичны для разных географических популяций этого вида. Уменьшение кри-

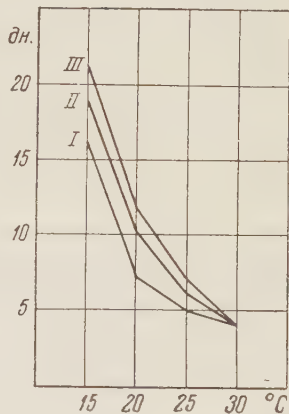


Рис. 1. Влияние температуры на скорость развития самок паутиного клеща разных географических популяций (от личинки до взрослого клеща): I — ленинградская, II — краснодарская, III — тбилисская

тического фотопериода в наших опытах составило примерно 1 час при продвижении популяции с севера на юг на каждые 3°. Эти показатели весьма близки и при сравнении популяций клеща из Ленинграда и Кэмбриджа (⁷). При этом не является неожиданным тот факт, что более южные популяции клеща обладают более факультативным характером диапаузы. В более южных районах нашей страны часть особей, достигающая 10% и более (табл. 1), может развиваться без диапаузы при наличии теплой зимы и достаточного количества пищи. Все эти данные с несомненностью указывают на разнокачественность географических популяций одного и того же вида с которой необходимо считаться как при изучении биологии, так и построении прогнозов численности вредителя. Разнокачественность зональных популяций вида проявляется многообразно. В частности, она широко представлена в виде зональной смены местообитаний у ряда видов насекомых, что нашло отражение в принципе смены станций Г. Я. Бей-Биенко (^{1,2}). Весьма интересно, что в наших опытах разнокачественность проявилась не только в известной специфике экологических реакций (⁶). Как оказалось, она касается и более глубоких физиологических свойств организма, в частности скорости развития; южные популяции клеща требуют большего эффективного тепла для развития одной генерации, чем северные.

Ленинградский
сельскохозяйственный институт

Поступило
3 II 1958

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Г. Я. Бей-Биенко, Тр. по защите растений, сер. энтомол., 1, в. 1 (1930). ² Г. Я. Бей-Биенко и др., Сельскохозяйственная энтомология, М.—Л., 1955. ³ Н. В. Бондаренко, ДАН, 70, № 6 (1950). ⁴ Н. В. Бондаренко, Сборн. тр. по защите растений, Изд. АН ЛатвССР, 1956. ⁵ А. С. Данилевский, Чтения памяти Холодовского, 1954—1955 гг., Изд. АН СССР, 1956. ⁶ А. С. Данилевский, Энтомол. обзор., 36, в. 1 (1957). ⁷ М. И. Кособуцкий, Система мероприятий в борьбе с паутиным клещиком на хлопчатнике, Л., 1934. ⁸ Г. Г. Курбанов, Тр. Инст. зоол. АН АзербССР, 18 (1955). ⁹ A. D. Lees, The physiology of Diapause in Arthropods, Cambridge 1955. ¹⁰ В. Г. Стативкин, Сельск. хоз. Таджикистана, № 5 (1957).

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ МОРФОЛОГИЯ

Л. В. АХАБАДЗЕ

**ГИСТОЛОГИЧЕСКИЕ ИЗМЕНЕНИЯ ПРИ ЗАЖИВЛЕНИИ
ПОВРЕЖДЕННОГО МИОКАРДА У КРЫС**

(Представлено академиком Н. Н. Анчиковым 23 I 1958)

В нашей коллективной работе (⁹) было показано, что при электродиатермическом повреждении нерегенерирующего при обычных условиях миокарда взрослых крыс и обработке оперированных животных гидролизатами и экстрактами, приготовленными из сердца крыс, можно значительно стимулировать регенерацию сердечной мышцы. Задача настоящей работы — проследить гистологические изменения в мышце сердца крысы в процессе заживления раны, возникшей после экспериментально вызванного повреждения, приводящего к образованию в миокарде очага некроза, подобного инфаркту.

Многочисленные и разнообразные опыты с повреждением сердца путем нанесения колотых или резаных ран, ожогов, введением в миокард инородных тел, наложением лигатуры на ветви венечных артерий привели исследователей к мысли, что миокард у взрослых млекопитающих (крыс, кроликов, собак и других животных) не регенерирует, а дефект в сердечной мышце замещается соединительной тканью (^{2, 3, 6-8, 10}). Патологоанатомические данные, полученные на человеке после смерти, наступившей в разные сроки заживления пораженного сердца, привели исследователей к такому же выводу: мышца сердца человека не способна к регенерации (^{1, 5}). Лишь недавно было показано, что у новорожденных котят после нанесения на сердце колото-резаных ран дефект полностью заполняется новообразованными мышечными волокнами к 15—20 дню после операции (¹¹).

В нашей работе проводились опыты на взрослых крысах весом 250—400 г, преимущественно самцах. При операции животное находилось под уретаново-эфирным наркозом; с помощью аппарата для искусственного дыхания обеспечивалась бесперебойная подача воздуха в легкие через трахею. После вскрытия четвертого межреберья осторожно разрезался перикард и производилась блокада сердца (0,5% раствором новокаина). На середину передней стенки левого желудочка с помощью электродиатермического коагулятора наносилось повреждение. В результате повреждения происходила мгновенная коагуляция тканей и образовывался белый инфарктоподобный конической формы участок с вершиной, обращенной вглубь миокарда. Диаметр поврежденного участка варьировал от 3 до 5 мм, глубина повреждения доходила до 4—5 мм. После осуществления коагуляции ткани грудной клетки послойно зашивались, рана присыпалась стрептоцидом и животному подкожно инъецировалось 2000 единиц пенициллина. Для гистологического изучения животные забивались через 1, 2, 3, 5, 7, 10, 13, 20, 30, 46, 60 и 120 дней после операции. Под опытом находились 20 животных. Кусочки сердца фиксировались в жидкости Ценкера и заливались в парафин. Препараты окрашивались гематоксилином Эрлиха с докраской эозином по Маллори и пикрофуксом по Ван-Гизону.

Изучение гистологического материала показывает, что через день после операции область дефекта представляет собой конический очаг некротизированных тканей, самая центральная часть которого настолько сильно

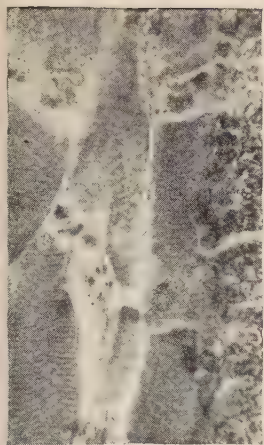
коагулирована, что мышечные волокна и клетки соединительной ткани в ней совершенно исчезают, и она заполняется сетью фибрина, петли которой почти сплошь инфильтрированы эритроцитами, лейкоцитами, небольшим количеством лимфоцитов и полибластов. Эпикард в области очага повреждения сильно разволокнен, утолщен и также инфильтрирован эритроцитами и лейкоцитами. Более периферические и глубокие части очага повреждения состоят из сильно измененных и отечных тканей. Мышечные волокна утрачивают свою продольную и поперечную исчерченность, гомогенизируются, подвергаются глыбчатому и зернистому некрозу и почти лишаются ядер. В некоторых участках некротизированные волокна имеют резко выраженную и грубую поперечную исчерченность (рис. 1 а). Среди этих тканей много лейкоцитов и геморрагических очагов. Вокруг очага повреждения наблюдается сильная воспалительная реакция, выражающаяся в значительной лейкоцитарной инфильтрации, фрагментации мышечных волокон, увеличении объема их ядер и в отеке тканей.

На 2 и 3 день после операции картина в основном не изменяется. К процессу воспаления прибавляется массовое разрушение лейкоцитов и эритроцитов с одновременным увеличением количества лимфоцитов и полибластов. В области некроза встречаются клетки в состоянии активного фагоцитоза. Сохранившиеся живыми мышечные волокна краевой зоны продолжают в омертвевшие их части, и культы мышц еще не образуются. На концах живых волокон можно видеть «миоциты» — клетки с удлинением ядра и характерной, расположенной вдоль длинной оси ядра зубчатой полоской хроматина (2). Ядра концов живых мышц увеличены, картина деления в них не обнаружено. Около распавшихся мышечных волокон краевой зоны имеются свободные мышечные ядра. На 3 день вокруг очага некроза собирается много полибластов и клеток соединительной ткани, что знаменует начало соединительнотканной инфильтрации.

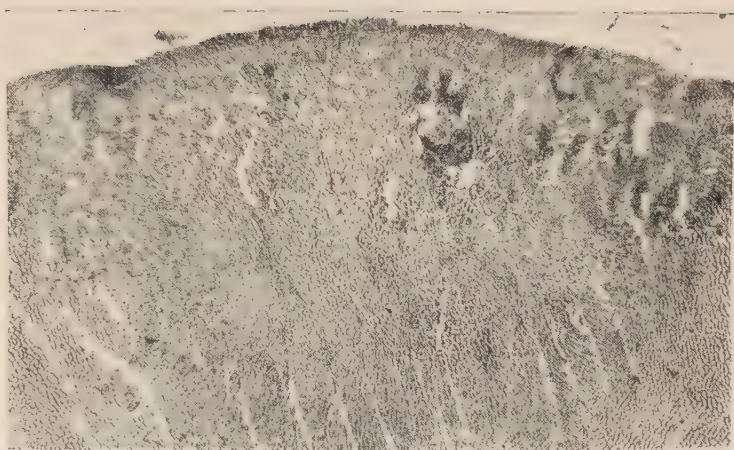
Через 5 дней после операции конический очаг некротизированных мышц ясно ограничен от живых тканей поясом молодой соединительной ткани (рис. 1 б). Многие клетки соединительной ткани находятся в состоянии амитотического и митотического деления и фрагментации. Кроме того в ней находятся также лейкоциты и лимфоциты. Отделенные от некротизированных мышц соединительной тканью, мышцы краевой зоны образуют культы, которые часто сильно вакуолизированы. Краевая зона мышц обрвана, за ней сразу начинается грануляционный вал. Дедифференцировки в культях мышц незаметно, продольная и поперечная исчерченность в них в основном сохраняется (рис. 2 а).

Через 7 дней после операции пояс грануляций начинает разрастаться по периферии к центру очага некротизированных тканей, отжимая некротизированные мышечные волокна от культей мышц краевой зоны. Мышечные культы, так же как и в предыдущем сроке фиксации, не дедифференцируются и резко обрываются. В окружающем их поясе плотной соединительной ткани находится много лейкоцитов. В центре зоны повреждения в непосредственном соприкосновении с остатками разрушающихся некротизированных мышечных волокон, по ходу их пучков, находится довольно много веретеновидных крупных клеток с ядром, богатым хроматином, и хорошо развитой тонковолокнистой окружающей его протоплазмой, — это миобласты. Иногда миобласты располагаются друг за другом, образуя цепочки (рис. 2 б). Большая часть грануляций состоит из полибластов, гистиоцитов и фибробластов, а также лейкоцитов, лимфоцитов, эритроцитов и новообразующихся сосудов.

На 10 день после повреждения область дефекта выполняется созревающей соединительной тканью, в которой идет образование коллагеновых волокон. Большая центральная часть очага состоит из остатков разрушающихся, лизирующихся мышц, инфильтрированных эритроцитами и лейкоцитами. По ходу старых разрушающихся мышц лежат миобласты. В концах культей мышц краевой зоны дедифференцировки не видно.

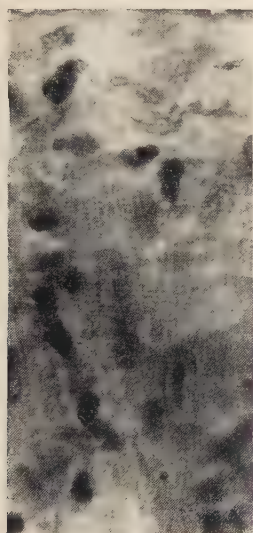


a



б

Рис. 1



a



б

Рис. 2



a



б

Рис. 3



a



б

Рис. 4

Через 13 дней после операции происходит полное рассасывание некротизированных мышц и замещение их соединительной тканью, превращающейся в рубец, идет дальнейшее уплотнение и созревание рубцовой ткани, причем особенно выраженное на границе с мышцами краевой зоны (рис. 3 а). Мышечные волокна, замкнутые в рубцовую ткань, подвергаются распаду и фагоцитозу. Соединительная ткань густо пронизана сосудами. В краевой зоне мышечные волокна на концах заострены, сохраняют продольную и поперечную исчерченность и обрастают соединительной тканью, в некоторых волокнах встречаются ядра миоцитарного типа. В рубцовой ткани миоциты не обнаружены. Вообще на этой стадии миоцитов меньше, чем на более ранних.

На 20 день после операции в созревшем рубце возникают очаги миобластов и новообразованных мышечных волокон. Молодые волокна достигают большой длины и толщины, саркоплазма их нежна и мясиста, окрашивается она так же, как и старые мышечные волокна, по периферии их ясно видна тонкая сарколемма. Однако дифференцировки развития поперечной исчерченности в новообразованных волокнах не происходит (рис. 3 б). Следовательно, имеются условия для возникновения мышечных волокон, но нет условий для их дифференцировки. Эти волокна очень различны по степени своего развития и имеются все переходы от миобластов до толстых и длинных мышечных волокон. Характерно, что они образуются независимо от культей мышц краевой зоны и отделены от них мощной прослойкой плотной рубцовой ткани. Культи мышц краевой зоны не проявляют никаких признаков регенерации. Образование отдельных небольших мышечных очажков и изолированных тоненьких мышечных волокон, плотно сжатых между сильно развитой соединительной тканью, при экспериментальном вызывании инфарктов сердца было описано в литературе (^{3, 10}). Позднее эти молодые новообразованные мышечные волокна распадаются и исчезают. К 46 дню после операции этих распадающихся волокон становится меньше (рис. 4 а), а на 60 день они исчезают совсем. Вся область повреждения заполняется коллагеновыми волокнами, клетками рубцовой соединительной ткани с удлиненными ядрами и множеством фагоцитов. Под эпикардом в толще рубца встречаются отдельные многоядерные гигантские клетки.

На 90 и 120 дни после операции происходит дальнейшее развитие и сморщивание рубцовой ткани (рис. 4 б). Рубец представляет собой ряд переплетенных пучков коллагеновых волокон, в основном ориентированных по ходу исчезнувших пучков старых мышц. Миоциты, исчезнувшие к концу второй недели опыта, вновь встречаются, и в большом количестве. Наружная часть рубца представляет собой широкопетлистую ткань, бедную клетками, внутренняя — плотную, богатую фибробластами и коллагеновыми волокнами. Стенка сердца в области рубца истончена.

На основании приведенных выше данных по динамике гистологических изменений тканей после электродиатермического повреждения миокарда весь процесс заживления мышц сердца крыс можно подразделить на 3 основных морфологических стадии: 1) стадию лизиса некротизированных тканей и образования регенерационной, молодой соединительной ткани в очаге повреждения; 2) стадию новообразования мышечных очажков внутри зоны новообразования и 3) стадию распада последних и созревания рубца. 1-я стадия начинается с момента электродиаатермической коагуляции миокарда и длится 13 дней. Для этой стадии характерны: отек, коагуляционный некроз мышц и соединительной ткани, сопровождающийся гомогенизацией мышечных волокон и их зернистым и глыбчатым распадом, некрозом и исчезновением мышечных и соединительнотканых ядер, а затем полным лизисом некротизированных тканей; инфильтрация коагулированных тканей эритроцитами, лейкоцитами, а затем лимфоцитами и полибластиами; гистиоцитарная инфильтрация очага некротизированных тканей, идущая в направлении от периферии к центру и сопровождающаяся новообразо-

ванием множества кровеносных сосудов; полное замещение некротизированных тканей грануляциями, которые развиваются в основном в рубцовую ткань. Культы мышечных волокон сохраняют свою поперечную и продольную исчерченность, не дедифференцируются, окружаются плотной рубцовой тканью и не регенерируют, хотя ядра их иногда амитотически и очень редко митотически делятся. 2-я стадия начинается приблизительно с 7 дня и длится до 20—30 дня после операции. В этот период в центре очага повреждения, в грануляциях, независимо от культей мышечных волокон краевой зоны, возле старых разрушенных коагулированных мышечных волокон, по ходу их, возникают миобласты, цепочки миобластов, а затем новообразованные мышечные волокна, которые достигают больших размеров и толщины, но не могут нормально дифференцироваться. 3-я стадия начинается с 20—30 дня после операции и длится неопределенно долгое время, 3—4—6 мес. В этот период происходит распад новообразованных мышечных волокон, полное их исчезновение на 60 день после операции, усиленный фагоцитоз, образование гигантских многоядерных клеток, созревание рубцовой ткани, развитие в ней коллагеновых волокон и альвеолярных структур, бедных клеточными элементами. Рубцовая ткань резко отграничена от культей мышечных волокон краевой зоны.

В нашей коллективной работе было отмечено, что после повреждения миокарда электрокардиограмма проходит острую, подострую и рубцовую фазы, причем в некоторых случаях на 20—30 день после операции она из рубцовой фазы возвращается к норме, а на 40—50 день вновь переходит в рубцовую фазу⁽³⁾. Мы полагаем, что это изменение электрокардиограммы объясняется тем, что на 20—30 день в рубце возникают очаги новообразования мышц, а к 45—60 дню после операции они исчезают и замещаются рубцом.

В ы в о д ы. 1. После электродиатермокоагуляции в миокарде крысы образуется инфарктоподобный очаг тканей типа коагуляционного некроза, развитие которого проходит несколько стадий: стадию рассасывания и образования регенерирующей незрелой соединительной ткани, стадию развития последней и новообразования мышечных очажков в ней и стадию распада новообразованных мышц и рубцевания очага повреждения.

2. Мышцы краевой зоны не дедифференцируются и не регенерируют: в центральной зоне, изолированно и независимо от краев старых мышц, возникают очаги новообразования мышечных волокон.

3. Новообразованные мышцы не могут нормально дифференцироваться, распадаются и замещаются рубцовой тканью. Следовательно, для роста и развития новообразованных мышц не хватает некоторых условий.

Институт морфологии животных им. А. Н. Северцова
Академии наук СССР

Поступило
11 I 1958

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Ф. Е. Агейченко, Хирургия, 7, 9 (1947). ² Н. Н. Аничков, О воспалительных изменениях миокарда, Диссертация, СПб., 1912. ³ F. Garbani, A. Gaspasi, Boll. Soc. Ital. Biol. Sper., 30, № 12 (1954). ⁴ A. Berent, Über Heilung der Herzwunden mit Berücksichtigung der Gravitischen Slummerzellentheorie, Dissertation, Königsberg, 1892. ⁵ Э. Р. Гессе, М. А. Гессе, Нов. хирург. арх., 6, 1 (1924). ⁶ H. T. Kagnier, J. E. Dwyer, J. Med. Res., 34, № 1 (1916). ⁷ R. Kolster, Scand. Arch. Physiol., 4, 1 (1893). ⁸ F. Martinotti, Giorn. d. Accad. di Med. di Torino, 7 (1888). ⁹ Л. В. Полежаев, Л. В. Ахабадзе, Н. А. Захарова, В. Л. Мانتьева, ДАН, 119, № 5 (1958). ¹⁰ P. A. Ring, J. Path. and Bact., 62, № 1 (1950). ¹¹ П. П. Румянцев, ДАН, 100, 601 (1955).

П. Г. КОСТЮК

ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ПРОЯВЛЕНИЯ РЕЦИПРОКНОГО ВОЗБУЖДЕНИЯ И ТОРМОЖЕНИЯ В ОТДЕЛЬНЫХ МОТОНЕЙРОНАХ

(Представлено академиком И. С. Бериташвили 5 II 1958)

Внутриклеточное отведение потенциалов из отдельных клеток центральной нервной системы⁽¹⁻³⁾ оказалось чрезвычайно эффективным методом для точного изучения течения и природы возбуждения и торможения в самых различных отделах мозга. В частности, уже первые работы, выполненные с помощью этого метода, с несомненностью показали, что основой простейшего случая центрального торможения (так называемого прямого торможения) является первичная гиперполяризация поверхности клетки, вызванная возбуждением особых синаптических окончаний.

Однако прямое торможение является частным случаем центрального торможения, играющим сравнительно незначительную роль в рефлекторной деятельности. Основное место в спинном мозге занимает реципрокное торможение полисинаптических рефлексов. До сих пор имеют место попытки рассматривать механизм прямого торможения как исключение и объяснять реципрокное торможение полисинаптических рефлексов иными клеточными процессами⁽⁴⁾. В связи с этим нами было проведено специальное изучение электрических реакций отдельных мотонейронов спинного мозга в случаях типичного реципрокного торможения, вызванного афферентными импульсами от раздражения кожных нервов, II группы проприоцептивных волокон или непосредственно дорсальных корешков.

Внутриклеточное отведение производилось при помощи стеклянных микроэлектродов с диаметром кончика около 0,5 μ , наполненных 3 М раствором хлористого калия. Изготовление микроэлектродов, определение их характеристик, методика отведения и регистрации потенциалов описаны нами ранее⁽⁵⁻⁶⁾. Основной трудностью при отведении потенциалов из отдельных клеток центральной нервной системы является преодоление дыхательных и пульсовых колебаний мозга. Это достигалось путем тщательной фиксации позвоночника за остистые и поперечные отростки; в ряде случаев дополнительно была необходима кураризация животного, наложение двустороннего пневмоторакса и перевод животного на искусственное дыхание с добавлением кислорода.

Перед введением микроэлектрода в вещество поясничного отдела спинного мозга производился локальный надрез мягкой мозговой оболочки. По ходу погружения микроэлектрода непрерывно контролировался его потенциал; скачкообразное возникновение постоянной разности потенциалов между микроэлектродом и индифферентным электродом указывало на прокол первым поверхности клетки. Основным методом дифференциации мотонейронов являлось возникновение пиковых потенциалов в ответ на раздражение центрального отрезка вентрального корешка, вспомогательными — расположение клетки в сером веществе мозга, большая величина мембранного потенциала (до 75 мВ), особенности ответов на ортодромные импульсы (наличие хорошо выраженных локальных изменений потенциалов и интенсивных пиковых потенциалов длительностью свыше 1 мсек., сопровождающихся значительной следовой гиперполяризацией).

Опыты производились на кошках и кроликах, подвергнутых децеребрации либо наркотизированных барбитуратами.

Исследования изменений потенциалов, возникающих при моносинаптическом возбуждении мотонейронов, подтвердили результаты, полученные

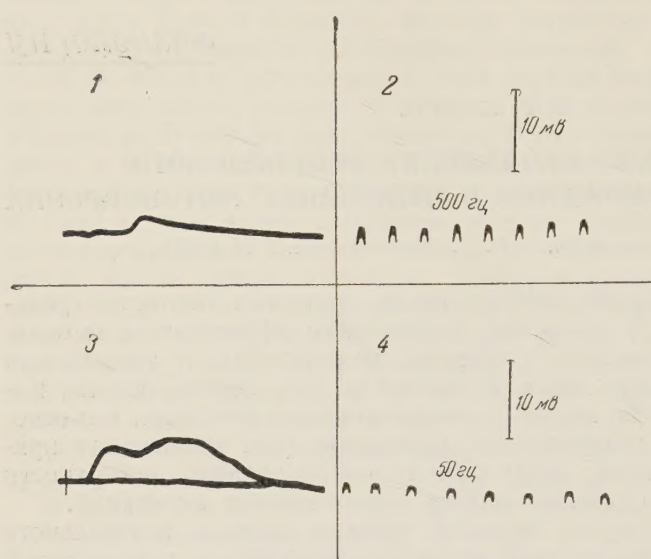


Рис. 1. Длительная деполяризация («возбуждающий синаптический потенциал») при моносинаптическом (1) и полисинаптическом (3) возбуждении мотонейрона

переходить в пиковые. Длительность пикового потенциала составляет около 1,5 мсек. Величина его в ряде клеток превышала величину мембранного потенциала. Однако во многих клетках пиковый потенциал равнялся мембранному или был меньше его; возможно, что такие клетки были несколько повреждены микроэлектродом. Пиковый потенциал сопровождается более или менее выраженной следовой гиперполяризацией, величина и длительность которой очень варьируют в различных мотонейронах.

При прямом торможении мотонейрона, вызванном раздражением I группы проприоцептивных афферентных волокон, из клетки отводится первичная гиперполяризация, течение которой примерно симметрично течению деполяризации при возбуждающем синаптическом влиянии (сравни 1 и 2 на рис. 1). Величина гиперполяризации составляет несколько милливольт. Изменение потенциала, которое отводится в этом случае, представляет собой истинное увеличение мембранного потенциала клетки, поскольку оно сразу же исчезает при расположении микроэлектрода с внешней стороны мембраны (рис. 2, 2). Течение указанных деполяризационных и гиперполяризационных изменений в мотонейроне полностью совпадает с течением моносинаптического облегчения и прямого торможения (8).

Изменения мембранного потенциала мотонейрона, участвующего в полисинаптической реакции (сгибательном или разгибательном рефлекс) являются более сложными и длительными, хотя принципиально не отличаются от описанных выше. На такое сходство уже указывалось в опубликованных ранее работах (9), хотя этот вопрос не был предметом специального исследования.

Одиночное раздражение кожного нерва, мышечного нерва или дорсального корешка, вызывающее полисинаптическое возбуждение мотонейронов, приводит к возникновению в последних длительной деполяризации, которая имеет волнообразное течение (рис. 1, 3). Общая длительность деполяризации достигает 0,1—0,2 сек., однако величина ее, как и при моносинаптическом возбуждении, не превышает 10 мв. Если в связи с усилением раздражения или улучшением функционального состояния мозга длительный потенциал превышает эту величину, то он переходит в обычный

ранее Эклсом и сотр. (1-2), Френком и Фьюртсом (7). При этом в клетках возникает два типа электрических изменений — длительные «синаптические» потенциалы и пиковые потенциалы. Синаптические потенциалы имеют характер быстро нарастающей и экспоненциально исчезающей деполяризации длительностью около 10 мсек. (рис. 1, 1), интенсивность которой не превышает 10 мв. При усилении раздражения нерва либо при ослаблении наркоза синаптические потенциалы усиливаются и могут

пиковый потенциал. Если последний возникает в начале развития длительного потенциала, то он не вызывает непременно ликвидации последующей

части деполяризации; наоборот, следовая гиперполяризация после пика может при этом укоротиться и перейти вновь в деполяризацию. Одинаковая максимальная величина длительной деполяризации при моносинаптическом и полисинаптическом возбуждении мотонейронов показывает, что условия возникновения в соме мотонейрона распространяющегося возбуждения являются одинаковыми независимо от того, в каком рефлексе участвует клетка — моносинаптическом или полисинаптическом. Если отводятся длительные потенциалы целой группы мотонейронов, то в этом

случае имеет место иная зависимость — моносинаптическое возбуждение связано с возникновением мощных пиковых потенциалов при очень незначительных длительных, полисинаптическое — с очень слабыми пиковыми потенциалами на фоне мощных длительных потенциалов (¹⁰). Данные внутриклеточного отведения показывают, что такие различия можно объяснить лишь различным соотношением в группе количеств разряжающихся и подпорогово-возбужденных клеток.

Противоположной реакцией, которая может быть зарегистрирована в мотонейронах при возникновении полисинаптических рефлекторных реакций, является длительная гиперполяризация. Скрытый период ее возникновения соответствует скрытому периоду деполяризационных изменений, длительность также может достигать 0,1—0,2 сек. Максимальная интенсивность гиперполяризации, зарегистрированная нами, составляла 15 мв (рис. 2, 4). В период гиперполяризации происходило торможение разрядов пиковых потенциалов в мотонейронах. Особенно хорошо это можно было наблюдать, если клетка до раздражения нерва находилась в состоянии стойкой ритмической активности; развитие гиперполяризации вызывало полное «молчание» клетки, которое длилось до возвращения мембранного потенциала к начальному уровню. Лишь в некоторых случаях, при особенно интенсивной ритмической активности, разряды пиковых потенциалов возобновлялись еще до полного исчезновения гиперполяризации; при этом пики оказывались несколько увеличенными (что и должно иметь место в области анаэлектрона).

Таким образом, электрофизиологическим выражением реципрокного торможения мотонейрона является длительная гиперполяризация его поверхности. Длительность гиперполяризации вполне соответствует длительности реципрокного торможения после одиночного стимула, установленного Самойловым и Киселевым (¹¹). Как и при прямом торможении, гиперполя-

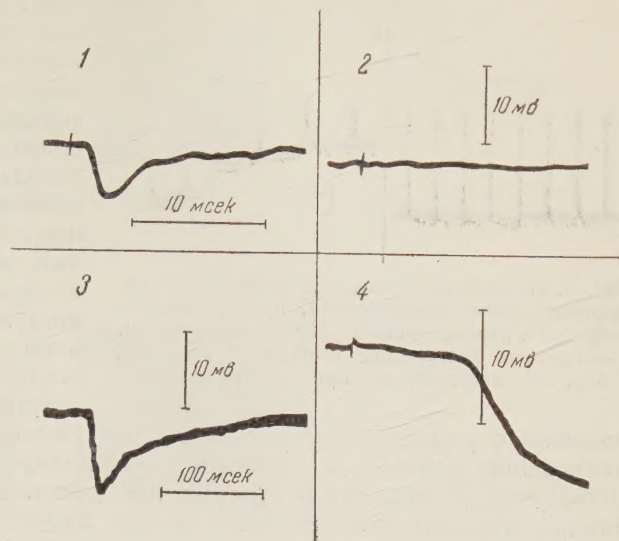


Рис. 2. Длительная гиперполяризация («тормозящий синаптический потенциал») при торможении мотонейрона, вызванном раздражением I группы проприоцептивных афферентных волокон (1) и раздражением кожного нерва (3); 2 — получена при расположении микроэлектрода непосредственно возле поверхности тормозимого мотонейрона; на 4 — показано при большой скорости развертки начало гиперполяризации, вызванной раздражением кожного нерва

ризация в этом случае является первичной, не связанной с наличием предварительных возбуждающих влияний на мотонейрон

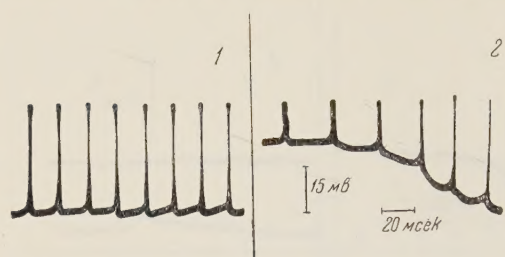


Рис. 3. Изменение длительной ритмической активности клетки (по-видимому, промежуточного нейрона) в период «спонтанной» деполяризации. 1 — пиковые потенциалы в обычных условиях, осц. 2 — изменение их при деполяризации

(рис. 2, 4). Правда, в некоторых случаях (в особенности при раздражении дорсальных корешков) изменения мембранного потенциала могли носить и более сложный характер, например начальная деполяризация переходила затем в гиперполяризацию. Однако обычно изменениями условий раздражения можно было разделить деполяризацию и гиперполяризацию; это ясно показывает, что такая сложность связана с одновременным действием на клетку нескольких

различных рефлекторных влияний — возбуждающих и тормозящих. Возникновение длительной сильной гиперполяризации в мотонейронах мы обнаруживали лишь после раздражений ипсилатеральных нервов. Контралатеральный импульс вызывал четкие изменения лишь в промежуточных нейронах, где могли возникать как возбуждательные, так и тормозные процессы (освещение их будет дано в другом сообщении). Если мотонейроны до раздражения находились в состоянии стойкой ритмической активности, то в таких случаях могло происходить временное прекращение их разрядов, не сопровождающееся каким-либо иным изменением мембранного потенциала. Такие данные приводят к заключению, что реципрокное торможение, вызванное контралатеральным импульсом, складывается не в мотонейронах, а в промежуточных нейронах. Это заключение полностью согласуется с результатами изучения изменений потенциалов мозговой поверхности при реципрокном торможении (¹²), которые также показывают, что ипсилатеральное торможение перекрестного экстензорного рефлекса локализуется в клетках вентрального рога, а контралатеральное торможение ипсилатерального флексорного — в клетках дорсального рога.

Ни в одном случае мы не наблюдали при одиночных раздражениях возникновения в клетках спинного мозга торможения, которое могло бы быть непосредственно связано с деполяризацией поверхности (как это, по-видимому, возможно в клетках мозжечка (¹³)). Деполяризационные процессы являлись лишь причиной возбуждения клетки и при достижении определенной величины (10 мВ) всегда генерировали пиковый потенциал. Более значительное снижение мембранного потенциала наблюдалось лишь в некоторых клетках от причин, не связанных с раздражением; но и в этом случае, даже если оно достигало величины в 30 мВ (которая никогда не наблюдается при поступлении афферентного импульса), пиковые потенциалы в клетке не подавлялись. Наблюдалось лишь уменьшение их амплитуды и частоты (рис. 3, 2). Таким образом, объяснение природы торможения при таких раздражениях парабитическими изменениями в клетках невозможно.

Киевский государственный университет
им. Т. Г. Шевченко

Поступило
30 I 1959

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. L. Brock, J. Coombs, J. Eccles, Proc. Roy. Soc., **140**, 170 (1952). 2 L. Brock, J. Coombs, J. Eccles, J. Physiol., **117**, 431 (1952). 3 J. Wodbury, H. Patton, Cold Springs Harb. Symp., **17**, 185 (1952). 4 П. Е. Моцный, Гагрские беседы, **2** 405 (1956). 5 Д. А. Голов, П. Г. Костюк, Физиол. журн. СССР, **42**, 114 (1956). 6 П. Г. Костюк, Биофизика, **2**, 401 (1957). 7 K. Frank, M. Fuortes, J. Physiol., **131**, 424 (1956). 8 П. Г. Костюк, Физиол. журн. СССР, **39**, 173 (1953). 9 J. Eccles, The Neurophysiological Basis of Mind, Oxford, 1953. 10 П. Г. Костюк, Физиол. журн. СССР, **42**, 303 (1956). 11 А. Ф. Самойлов, М. А. Киселев, Журн. экс. биол. и мед., **5**, 36 (1927). 12 G. McCouch, G. Austin, Yale J. Biol. Med., **28**, 372 (1956). 13 R. Granit, C. Phillips, J. Physiol., **133**, 520 (1956).